

MENGIDEALISASIKAN PENAMPANG LINTANG BULUH BAMBU MENJADI BENTUK GEOMETRI *CONIC* UNTUK MENGHITUNG SIFAT PENAMPANGNYA

(*Conic Geometric Idealization Shape of Bamboo Culm's Cross-section to Calculating Section Properties*)

Effendi Tri Bahtiar^{1, 2, *}, Asep Denih³, Lina Karlinasari¹, Gustian Rama Putra³, Naresworo Nugroho¹, & Sulistiyono⁴

¹Departemen Hasil Hutan, Fakultas Kehutanan dan Lingkungan, Institut Pertanian Bogor, Bogor 16153

²Program Studi Teknik Sipil, Fakultas Teknik, Universitas Pakuan, Bogor 16129

³Program Studi Ilmu Komputer, FMIPA Universitas Pakuan, Bogor 16129

⁴Fakultas Kehutanan, Universitas Kuningan, Kuningan 45513

Email: haryono@unpad.ac.id

Diterima 12 Maret 2022, direvisi 16 Juni 2022, disetujui 21 Agustus 2022

ABSTRACT

*A designer needs to simplify the bamboo cross-section shape variation to the closest standard geometry so a structural analysis of bamboo construction can be carried out. Bamboo culm's cross-sectional geometrics vary and may be similar to conic such as a circle, ellipse, or egg-shape ring. The best-fit conic section, which is the most similar to the actual geometric shape of the bamboo culm's cross-section, should be considered. This study formulates mathematical equations for calculating the bamboo culm's cross-sectional properties (including the area, the first moment of area, the centroid, and the moment of inertia), which are fitted by a circle, ellipse, and egg-shaped ring. The thickness, diameter, major axis, and minor axis of four bamboo species (i.e., *Gigantochloa apus*, *Bambusa vulgaris*, *Gigantochloa pseudoarundinacea*, and *Gigantochloa robusta*) were measured, and those values were substituted into the equations to produce the range of cross-sectional properties of each species.*

Keywords: Bamboo construction, conic, cross-sectional properties, structural analysis, strength of material

ABSTRAK

Seorang desainer perlu menyederhanakan variasi bentuk penampang bambu mengikuti geometri ideal yang paling mendekati bentuk aktualnya agar analisis struktur konstruksi bambu dapat dilakukan. Geometri penampang buluh bambu bervariasi dan menyerupai cincin *conic* seperti lingkaran, elips, atau bulat telur. Bentuk penampang *conic* yang paling pas yaitu yang paling menyerupai bentuk penampang aktual bambu perlu dipertimbangkan. Studi ini memformulasikan persamaan-persamaan matematis untuk menghitung sifat penampang buluh bambu (termasuk luas, momen pertama penampang, *centroid*, dan momen inersia) yang disesuaikan dengan bentuk cincin lingkaran, elips, dan bulat telur. Ketebalan, diameter, sumbu mayor, dan sumbu minor empat jenis bambu yaitu bambu tali (*Gigantochloa apus*), bambu ampel (*Bambusa vulgaris*), bambu andong (*Gigantochloa pseudoarundinacea*), dan bambu mayan (*Gigantochloa robusta*) diukur dan kemudian nilai-nilainya disubstitusikan ke dalam persamaan yang terbentuk untuk menghasilkan wilayah sifat-sifat penampang setiap spesies bambu.

Kata kunci: Konstruksi bambu, *conic*, sifat penampang, analisis struktur, kekuatan bahan.

I. PENDAHULUAN

Sebagaimana lazimnya bahan alam, bambu terdiri atas bermacam-macam sel yang heterogen (Andre, 1998; Liese, 1985, 2002; Liese & Tang, 2015), sehingga sifat mekanis bambu bervariasi di setiap bagiannya (Chuma et al., 1990; Janssen, 1991; Mohmod et al., 1992; Mohmod et al., 1990). Pemahaman mengenai keheterogenan sifat buluh bambu mempengaruhi pemilihan pemanfaatan setiap jenis bambu. Sifat mekanis dinding buluh bambu semakin menurun dari tepi ke dalam, sementara itu analisis mekanika teknik lazim menyederhanakan masalah dengan mengasumsikan sebuah komponen

struktur bersifat homogen. Jika sepotong bambu diasumsikan homogen, maka suatu titik pada posisi tertentu yang mewakili material tersebut perlu dipertimbangkan. Sifat mekanis bahan alam, termasuk bambu dan kayu, pada umumnya diambil kekuatan karakteristiknya yaitu nilai 5% batas bawah populasi. Kekuatan karakteristik dikoreksi lebih lanjut dengan beberapa faktor penyesuaian (Bahtiar et al., 2021; Nugroho & Bahtiar, 2021; Nugroho et al., Bahtiar, & Nurmada, 2018; Nurmada et al., 2017; Vivas et al., 2022) untuk mendapatkan nilai tegangan ijin, sehingga nilai tegangan ijin dapat diandalkan (*reliable*) untuk ditetapkan sebagai nilai kekuatan dan

kekakuan bambu dalam perencanaan konstruksi bambu modern. Nilai tegangan ijin dapat diperoleh melalui pengujian sifat mekanis material yang mewakili populasinya (ASTM, 2017; Liu et al., 2022), pemilahan struktural (Bahtiar et al., 2019; Bahtiar et al., 2020; Firmanti et al., 2005; International Organization for Standardization, 2018; Nugroho et al., 2021; Nugroho et al., 2018; Nurmada et al., 2017; Trujillo & Jangra, 2016), maupun pengujian non-destruktif (NDT) (Javadian et al., 2019; Sá et al., 2017; Shukla & Sharma, 2017). Tegangan ijin buluh bambu terdaftar dalam suatu tabel sesuai kelas mutunya dan selanjutnya dikoreksi dengan faktor-faktor penyesuaian (Hayatunnufus et al., 2022; Bahtiar et al., 2022) menjadi nilai desain dalam perencanaan bangunan.

Di samping memerlukan tegangan ijin, perencanaan konstruksi juga memerlukan nilai sifat-sifat penampang yang meliputi bentuk, ukuran, luas, *centroid*, momen pertama, dan momen inersia. Analisis struktur konstruksi memerlukan besaran sifat-sifat penampang antara lain luas, momen pertama, *centroid*, dan momen inersia. Luas penampang (A) merupakan jumlah luas seluruh bidang differensial (dA) komponen penampang tersebut (Persamaan 1). Jika setiap bidang differensial berbentuk persegi panjang yang sangat kecil dengan panjang dx dan lebar dy , maka luas suatu penampang dinyatakan sebagai integralnya (Persamaan 2).

$$A = \int_a dA \dots\dots\dots (1)$$

$$A = \iint_{y \ x} dx \ dy \dots\dots\dots (2)$$

Momen pertama penampang (Q), dikenal juga sebagai momen statis penampang atau momen pertama inersia, merupakan jumlah hasil kali luas bidang differensial (dA) dengan jarak bidang differensial tersebut terhadap sebuah sumbu acuan tertentu. Persamaan 3 dan 4 berturut-turut menunjukkan persamaan momen pertama penampang jika sumbu acuan yang dipilih adalah sumbu x dan sumbu y .

$$Q_x = \int_A y dA \dots\dots\dots (3)$$

$$Q_y = \int_A x dA \dots\dots\dots (4)$$

Momen pertama penampang (Q_x atau Q_y) merupakan ukuran distribusi luas suatu bidang terhadap sumbu tertentu. Momen pertama penampang lebih lanjut diperlukan untuk menghitung *centroid* (c) yang merupakan titik berat luas suatu

bidang. Koordinat *centroid* ($\bar{x}$, $\bar{y}$) diplotkan di diagram *Cartesius*, ditentukan menurut Persamaan 5 dan 6.

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA} \dots\dots\dots (5)$$

$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} \dots\dots\dots (6)$$

Momen kedua penampang, disebut juga momen inersia penampang (I) atau momen lembam, merupakan jumlah hasil kali luas bidang differensial (dA) dengan kuadrat jarak bidang differensial tersebut terhadap sumbu (x^2 atau y^2) (Persamaan 7 dan 8).

$$I_x = \int_A y^2 dA \dots\dots\dots (7)$$

$$I_y = \int_A x^2 dA \dots\dots\dots (8)$$

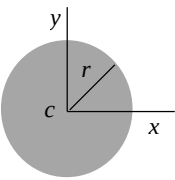
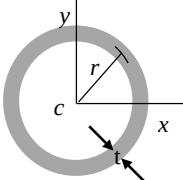
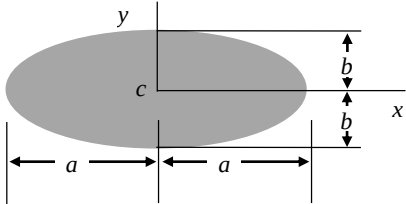
Faktor genetik dan lingkungan selama masa pertumbuhan rumpun bambu menyebabkan variasi bentuk penampang *conic* seperti lingkaran, elips, atau bulat telur. Cincin lingkaran lazim dipilih sebagai bentuk umum penampang buluh bambu (Inoue et al., 2011; Schulgasser & Witztum, 1992; Sharma et al., 2013; Wegst, 2011). Selain lingkaran, penampang bambu dapat diidealisasi mendekati bentuk geometri *conic* standard lainnya yaitu elips atau bulat telur. Setiap bentuk geometri *conic* memiliki sifat-sifat penampang yang khas antara lain eksentrisitas yang mempengaruhi nilai sifat mekanis hasil pengujian (Bahtiar et al., 2013). Idealisasi bentuk geometri standar untuk setiap buluh bambu mempertimbangkan sifat penampang yang lebih mendekati kondisi aktualnya sehingga stuktur konstruksi menjadi lebih dapat diandalkan (*reliable*) (Bahtiar, 2015). Studi ini bertujuan untuk mendiskusikan bentuk-bentuk geometri *conic* standard yang mendekati bentuk penampang buluh bambu dan menurunkan formula untuk menghitung nilai sifat-sifat penampangnya yaitu meliputi luas, momen pertama, *centroid*, dan momen inersia penampang.

II. BAHAN DAN METODE

Penampang buluh bambu dapat diidealisasi menjadi beberapa bentuk geometri *conic* standar yaitu lingkaran, elips, atau bulat telur. Bentuk lingkaran lebih disukai karena formulanya lebih sederhana, serta sering dipelajari di buku teks struktur dan mekanika bahan. Elips didiskusikan dalam beberapa buku teks lanjutan. Berbeda dengan lingkaran dan elips, formula sifat-sifat penampang bentuk bulat telur tampaknya

belum diformulasikan dan belum diuraikan buku-buku referensi yang tersedia saat ini.

Tabel 1. Sifat-sifat penampang lingkaran, cincin lingkaran, dan elips (Gere & Timoshenko, 1991)
Table 1. Section properties of circle, circle ring, and ellipse (Gere & Timoshenko, 1991)

		
Lingkaran (Circle): $A = \pi r^2$; $I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4}$	Cincin lingkaran (Circle ring): $A = 2\pi r t$; $I_x = I_y = \pi r^3 t$	Elips (ellipse): $A = \pi a b$; $I_x = \frac{\pi a b^3}{4}$; $I_y = \frac{\pi b a^3}{4}$

Sifat-sifat penampang lingkaran dan elips disajikan pada Tabel 1 (Gere & Timoshenko, 1991).

Lingkaran merupakan kurva yang dibangun dari Persamaan 9, sedangkan elips dibangun dari Persamaan 10.

$$x^2 + y^2 = r^2 \dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \dots\dots\dots (10)$$

Keterangan (Remarks): r = jari-jari lingkaran; a = sumbu semi mayor; dan b = sumbu semi minor

Kurva bulat telur diperoleh dengan mengalikan y^2 pada persamaan elips (Persamaan 10) dengan suatu fungsi tertentu ($f(x)$) sehingga di satu sisi lebih besar daripada sisi lainnya. Persamaan 11 membentuk kurva bulat telur.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} f(x) = 1 \dots\dots\dots (11)$$

Fungsi $f(x)$ pada Persamaan 11 dipilih dari gugus fungsi linier, *power*, atau eksponensial (Persamaan 12, 13, dan 14). Kurva bulat telur yang diperoleh dengan memodifikasi elips, yaitu mengalikan y^2 dengan fungsi $f(x)$, dicontohkan pada Gambar 1. Pada bentuk geometri *conic* (antara lain: lingkaran, elips, dan bulat telur), setiap garis lurus hanya berpotongan dengan kurva sebanyak-banyaknya di 2 (dua) titik saja.

$$f(x) = 1 + mx; \text{ asalkan } f(x) > 0 \text{ untuk } |x| \leq a \dots\dots\dots (12)$$

$$f(x) = \frac{1}{1 - mx}; \text{ asalkan } f(x) > 0 \text{ dan } mx \neq 1 \text{ untuk } |x| \leq a \dots\dots\dots (13)$$

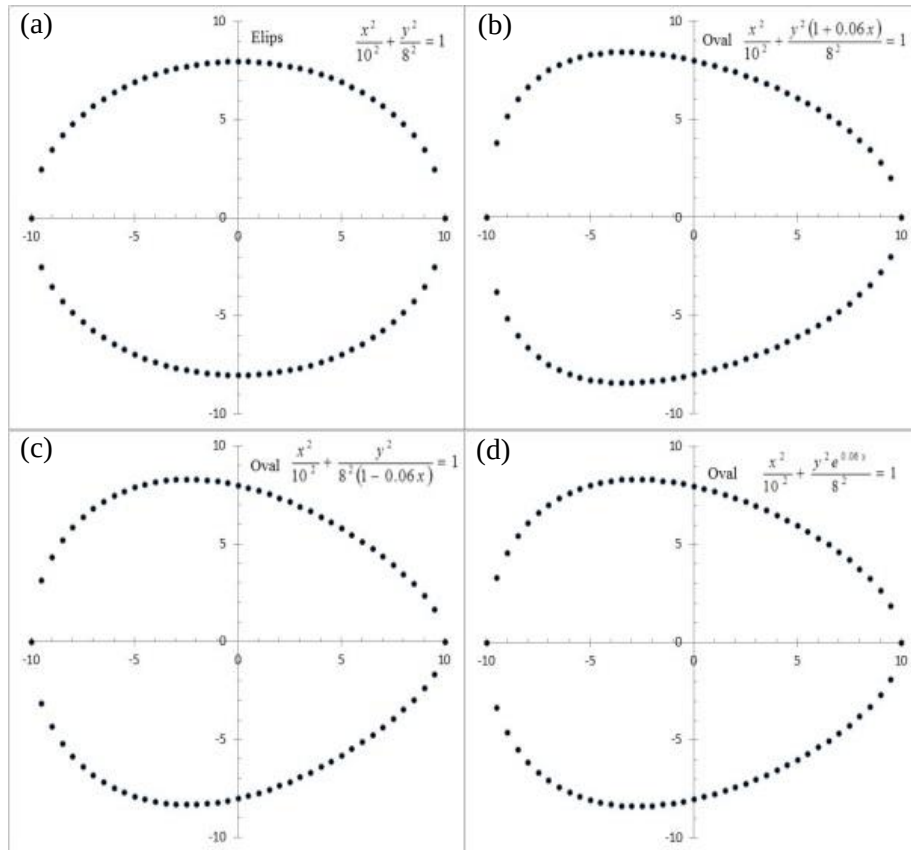
$$f(x) = e^{mx} \dots\dots\dots (14)$$

Formula standar sifat penampang dapat diperoleh sesuai dengan definisinya untuk setiap bentuk geometri yang dibangun berdasarkan fungsi yang ditetapkan. Studi ini menguraikan penurunan rumus sifat-sifat penampang tersebut secara detil.

Dimensi 400 batang bambu tali (*Gigantochloa apus*), ampel (*Bambusa vulgaris*), andong (*Gigantochloa pseudoarundinacea*), dan mayan (*Gigantochloa robusta*), yaitu 100 batang setiap jenisnya, yang tersedia di lapak penjual bambu di Bogor, Jawa Barat diukur. Diameter luar dan tebal dinding diukur menggunakan kaliper digital, sedangkan panjangnya diukur dengan pita ukur. Diameter luar diukur di pangkal, tengah, dan ujung, sedangkan tebal dinding diukur di pangkal dan ujung. Hasil pengukuran dimensi disubstitusikan ke dalam persamaan-persamaan sifat penampang.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Studi ini mendiskusikan tiga bentuk geometri *conic* standar untuk mengidealisasikan bentuk penampang bambu yaitu cincin lingkaran, elips, dan bulat telur. Persamaan 9 dan 10 memperlihatkan bahwa lingkaran merupakan salah satu bentuk khusus elips yaitu ketika sumbu semi mayor (a) sama besar dengan sumbu semi minor (b). Ketika $a = b = r$, Persamaan 9 = Persamaan 10, sehingga elips menjadi lingkaran berjari-jari r . Geometri analisis dari bentuk bulat telur (Persamaan 11) menunjukkan elips dan lingkaran merupakan bentuk khusus dari bulat telur. Elips terbentuk ketika $f(x) = 1$, sedangkan lingkaran terbentuk ketika $f(x) = 1$ dan $a = b$. Formula sifat-sifat penampang bulat telur yang didiskusikan pada studi ini berlaku juga untuk setiap bentuk khususnya. Tiga persamaan umum geometri bulat telur dibangun pada studi ini, merupakan hasil substitusi fungsi linier (Persamaan 12), *power* (Persamaan 13), dan eksponensial (Persamaan 14) ke dalam Persamaan 11, menghasilkan Persamaan 15, 16, dan 17.



Gambar 1. Elips dan bulat telur yang disketsa dari Persamaan (a) 10; (b) 11 dan 12; (c) 11 dan 13; (d) 11 dan 14

Figure 1. Ellips and egg-shaped sketches made from Eqs. (a) 10; (b) 11 and 12; (c) 11 and 13; (d) 11 and 14

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}(1 + mx) = 1; \text{ asalkan } f(x) > 0 \text{ untuk } |x| \leq a \quad (15)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \frac{1}{1 - mx} = 1; \text{ asalkan } f(x) > 0 \text{ dan } mx \neq 1 \text{ untuk } |x| \leq a \quad (16)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} e^{mx} = 1 \quad (17)$$

A. Penampang Lingkaran

Bentuk penampang buluh bambu dapat didekati dengan kurva cincin lingkaran sempurna yang dibangun dengan Persamaan 9 (Gambar 2a).

1. Luas area lingkaran

Luas area cincin lingkaran dengan jari-jari luar r_1 dan jari-jari dalam r_2 diperoleh dengan Persamaan 18.

$$A = \pi(r_1^2 - r_2^2) \quad (18)$$

2. Momen pertama penampang lingkaran

Momen pertama penampang dihitung untuk bidang setengah cincin lingkaran yang posisinya terletak di atas sumbu x . Momen pertama penampang setengah cincin lingkaran adalah selisih momen pertama setengah cincin lingkaran berjari-jari r_1 ($Q_x(r_1)$) dengan momen pertama setengah cincin lingkaran berjari-jari r_2 ($Q_x(r_2)$) (Persamaan 19).

$$Q_x = Q_x(r_1) - Q_x(r_2) \quad (19)$$

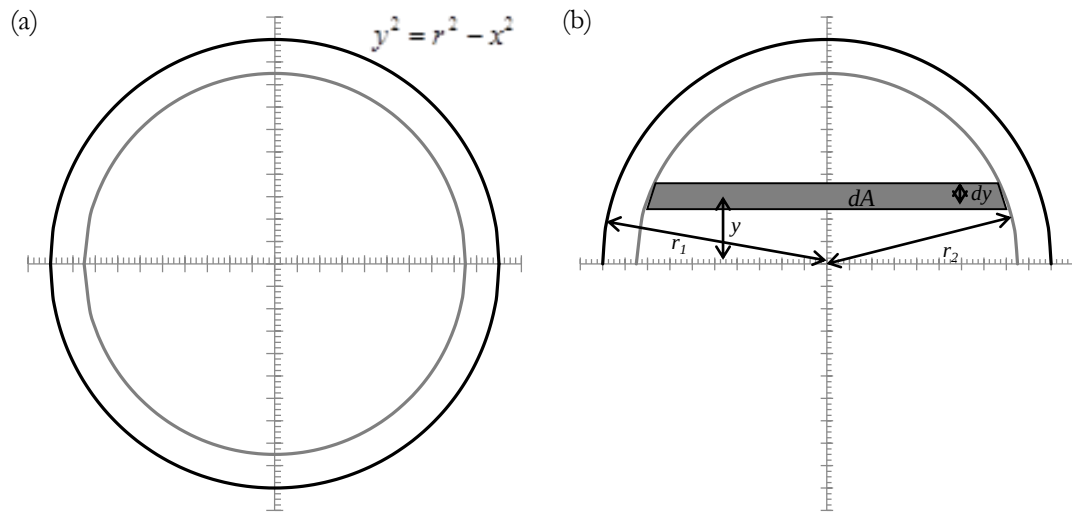
Momen pertama bidang setengah lingkaran berjari-jari r didiskusikan pada Persamaan 20 – 26 mengikuti sketsa pada Gambar 2b.

$$Q_x = \int_0^r y dA = \quad (20)$$

$$dA = 2x dy \quad (21)$$

$$x = \sqrt{r^2 - y^2} \quad (22)$$

$$dA = 2\sqrt{r^2 - y^2} dy \quad (23)$$



Gambar 2. (a) Cincin lingkaran yang dibangun dari Persamaan 9, dan (b) sketsa untuk mendapatkan formula momen pertama setengah lingkaran

Figure 2. (a) Circle ring generated from Equation 9, and (b) Sketch of half circle to get its first moment of area

$$Q_x = 2 \int_0^r y \sqrt{r^2 - y^2} dy = \dots\dots\dots (24)$$

$$Q_x = 2 \int_0^r y \sqrt{r^2 - y^2} \frac{d(r^2 - y^2)}{-2y} = \dots\dots\dots (25)$$

$$Q_x = - \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2} d(r^2 - y^2) = - \left[\frac{2}{3} (r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^r$$

$$= \frac{2}{3} r^3 \dots\dots\dots (26)$$

Momen pertama penampang setengah lingkaran adalah Persamaan 26 dan momen pertama setengah cincin lingkaran adalah Persamaan 27. Persamaan 27 berguna untuk menghitung tegangan geser horizontal batang bambu utuh yang menerima beban lentur, karena perhitungan tegangan geser horizontal balok lentur melibatkan momen pertama penampang di *centroid*.

$$Q_x = \frac{2}{3} (r_1^3 - r_2^3) \dots\dots\dots (27)$$

3. Centroid lingkaran

Centroid lingkaran berada di titik pusatnya. Jika lingkaran diperoleh dari Persamaan 9, maka *centroid* terletak di koordinat (0, 0), yaitu tepat di titik beratnya.

4. Momen inersia bidang lingkaran

Lingkaran pada Gambar 3 disketsa sebagai panduan memformulasikan rumus momen inersia. Sesuai definisi, momen inersia terhadap sumbu *x* dan *y* masing-masing dinyatakan oleh Persamaan 7 dan 8.

Lingkaran berbentuk simetris, sehingga momen inersia terhadap sumbu *x* (I_x) sama dengan momen inersia terhadap sumbu *y* (I_y). Mengacu pada Gambar 3 di mana notasi *y* dan *dA* berturut-turut dinyatakan oleh Persamaan 28 dan 29, maka Persamaan 7 diuraikan lebih lanjut menjadi Persamaan 30.

$$y = r \sin \theta \dots\dots\dots (28)$$

$$dA = r dr d\theta \dots\dots\dots (29)$$

$$I_x = \int_0^{2\pi} \int_{-r}^r r^3 \sin^2 \theta dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4} \sin^2 \theta d\theta \dots\dots\dots (30)$$

Persamaan 31 merupakan fungsi identitas trigonometri yang selanjutnya dimodifikasi menjadi Persamaan 32. Persamaan 33 juga fungsi identitas trigonometri. Persamaan 32 disubstitusikan ke dalam Persamaan 33 menghasilkan Persamaan 34. Dengan aljabar sederhana Persamaan 34 diubah menjadi Persamaan 35.

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \dots\dots\dots (31)$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \dots\dots\dots (32)$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \dots\dots\dots (33)$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \dots\dots\dots (34)$$

$$\sin^2 \theta = \frac{(1 - \cos 2\theta)}{2} \dots\dots\dots (35)$$

Persamaan 35 disubstitusikan ke Persamaan 30 menghasilkan Persamaan 36. Bentuk simetris lingkaran mengakibatkan momen inersia lingkaran

Tabel 2. Sifat-sifat penampang bambu yang didekati sebagai cincin lingkaran
Table 2. Bamboo cross-section's properties which are idealized as a circle ring

Deskripsi (Description)	Jenis Bambu (Bamboo Species)			
	<i>G. apus</i>	<i>B. vulgaris</i>	<i>G. pseudoarundinacea</i>	<i>G. robusta</i>
Rata-rata diameter tepi luar; (Average outer diameter) (d_1) (cm)	8,58	6,85	8,66	8,24
Rata-rata jari-jari tepi luar (Average outer radius) (r_1) (cm)	4,29	3,425	4,33	4,12
Rata-rata tebal dinding (Average culm wall thickness) (t) (cm)	1	0,9	1,25	1,1
Rata-rata diameter rongga (Average cavity diameter) (d_2) (cm)	6,58	5,05	6,16	6,04
Rata-rata jari-jari rongga (Average cavity radius) (r_2) (cm)	3,29	2,525	3,08	3,02
Luas area dinding (Culm wall area (A)) (cm ²)	23,81	16,82	29,10	24,67
Momen pertama setengah cincin lingkaran (First moment of half circle ring) (Q_x dan Q_y) (cm ³)	28,89	16,05	34,64	28,26
(Centroid coordinate ($\bar{x}$, $\bar{y}$))	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
Momen inersia penampang dinding (Cell wall's Moment of Inertia) (I_x dan I_y) (cm ⁴)	174,00	76,15	205,40	160,97

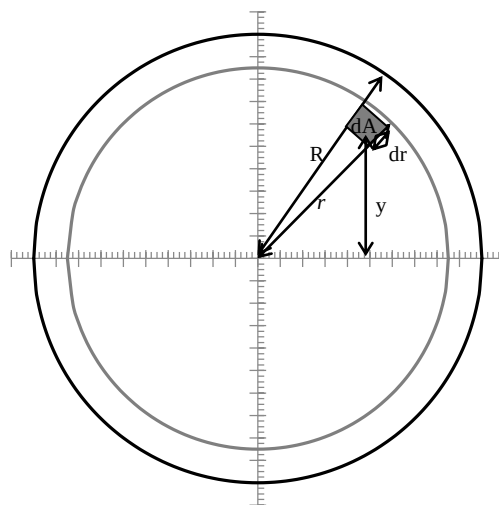
mengakibatkan momen inersia terhadap sumbu x sama dengan terhadap sumbu y (Persamaan 37). Persamaan 38 adalah momen inersia lingkaran berongga menyerupai cincin.

$$I_x = \int_0^{2\pi} \frac{2\pi r^4}{4} \frac{(1 - \cos 2\theta)}{2} d\theta = \frac{r^4}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\theta) \frac{d2\theta}{2} = \frac{r^4}{16} [2\theta + \sin 2\theta]_0^{2\pi} = \frac{\pi r^4}{4} \dots \dots \dots (36)$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4} \dots \dots \dots (37)$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi}{4} (r_1^4 - r_2^4) \dots \dots \dots (38)$$

Rata-rata sifat penampang empat jenis bambu yang diamati yaitu [tali (*Gigantochloa apus*), ampel (*Bambusa vulgaris*), andong (*Gigantochloa pseudoarundinacea*), dan mayan (*Gigantochloa robusta*)] yang diidealisasi menjadi cincin lingkaran disajikan pada Tabel 2.



Gambar 3. Sketsa lingkaran untuk membantu menurunkan rumus momen inersia
Figure 3. Sketch of circle to get the moment of inertia formula

B. Bentuk Penampang Elips

Pada banyak kasus, diameter penampang bambu di suatu potongan tidak selalu sama tetapi bervariasi. Di suatu bidang lintang (*cross-section*) tertentu terdapat diameter minimum dan maksimum, sehingga pada kasus ini elips lebih mendekati bentuk penampang lintang aktual buluh bambu daripada lingkaran sempurna. Elips memiliki jari-jari maksimum yang disebut dengan sumbu semi mayor (a), dan jari-jari minimum yang disebut dengan sumbu semi minor (b). Bentuk elips dapat mengidealisasi dinding luar maupun rongga bambu, sehingga penampang buluh bambu menyerupai cincin elips.

Bidang elips diperoleh dengan cara menurunkan tinggi lingkaran berjari-jari a yaitu y dikalikan rasio sumbu semi mayor terhadap sumbu semi minor (a/b), sebagaimana dinyatakan dengan notasi matematika pada Persamaan 39 dan grafik Gambar 4. Persamaan 39 identik dengan Persamaan 10, yang terbukti oleh aljabar Persamaan 40.

$$x^2 + \left(\frac{a}{b}y\right)^2 = a^2 \dots\dots\dots (39)$$

$$a^2 \frac{y^2}{b^2} = a^2 - x^2 \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \dots\dots\dots (40)$$

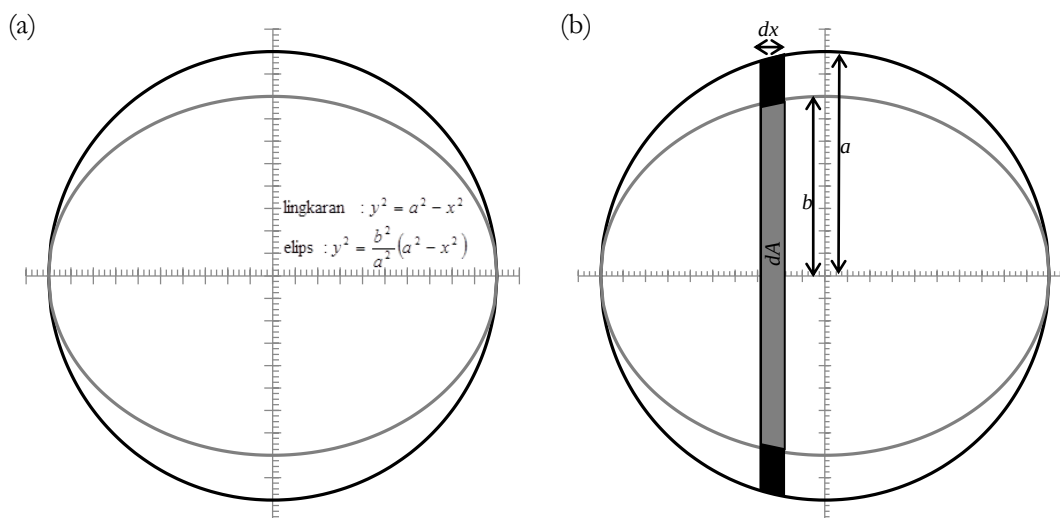
1. Luas area elips

Luas area elips diperoleh dengan cara membandingkannya dengan luas lingkaran berjari-jari a (Gambar 4a dan b). Gambar 4b menunjukkan lingkaran dan elips yang masing-masing dipecah menjadi sejumlah tak hingga bidang differensial berbentuk persegi panjang. Sesuai Gambar 4b, luas setiap bidang differensial pecahan elips dihitung menggunakan Persamaan 41. Untuk setiap bidang differensial, yaitu pada posisi x yang sama, tinggi bidang differensial pecahan elips berbeda dengan tinggi bidang differensial pecahan lingkaran dengan lingkaran dengan rasio sebesar b/a (Persamaan 42). Rasio ini bernilai konstan untuk semua posisi x .

$$dA_{elips} = y_{elips} dx \dots\dots\dots (41)$$

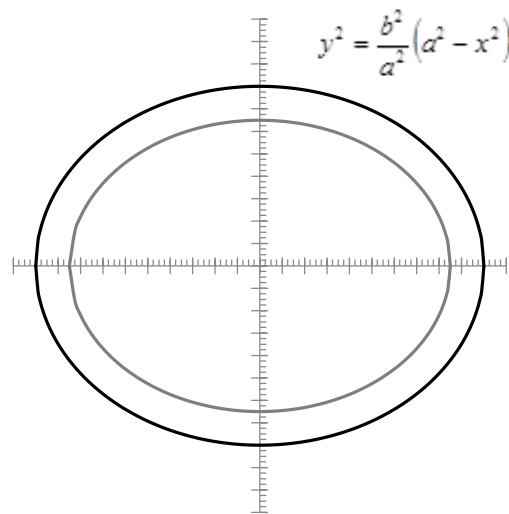
$$y_{elips} = \frac{b}{a} y_{lingkaran} \dots\dots\dots (42)$$

Bidang differensial elips (y_{elips}) memiliki tinggi sesuai Persamaan 42, lalu disubstitusikan ke dalam Persamaan 41 menghasilkan Persamaan 43. Persamaan 43 diintegrasikan sehingga Persamaan 44 diperoleh. Luas lingkaran berjari-jari a adalah πa^2 sehingga luas elips didekati oleh Persamaan 45. Luas area cincin elips bersumbu semi mayor tepi a_1 dan dalam a_2 , serta sumbu semi minor tepi b_1 dan dalam b_2 dihitung menggunakan Persamaan 46. Kurva elips berongga menyerupai cincin diperlihatkan di Gambar 5. Tampak di Gambar 5, batas luar dan batas dalam cincin elips berbentuk elips yang memungkinkan ketebalan dinding buluh bambu bergradasi.



Gambar 4. (a) Perbandingan kurva elips dengan kurva lingkaran, dan (b) Sketsa untuk perhitungan luas elips

Figure 4. (a) Ellipse and circle curve comparison, and (b) Sketch to derive the ellipse area



Gambar 5. Sketsa penampang bambu yang didekati dengan bentuk cincin elips
Figure 5. Sketch of bamboo cross-section idealized as an ellipse ring

$$dA_{\text{elips}} = \left(\frac{b}{a} y_{\text{lingkaran}} \right) dx \dots\dots\dots (43)$$

$$A_{\text{elips}} = \int_{-a}^a \frac{b}{a} y_{\text{lingkaran}} dx = \frac{b}{a} \int_{-a}^a y_{\text{lingkaran}} dx = \frac{b}{a} A_{\text{lingkaran}} \dots (44)$$

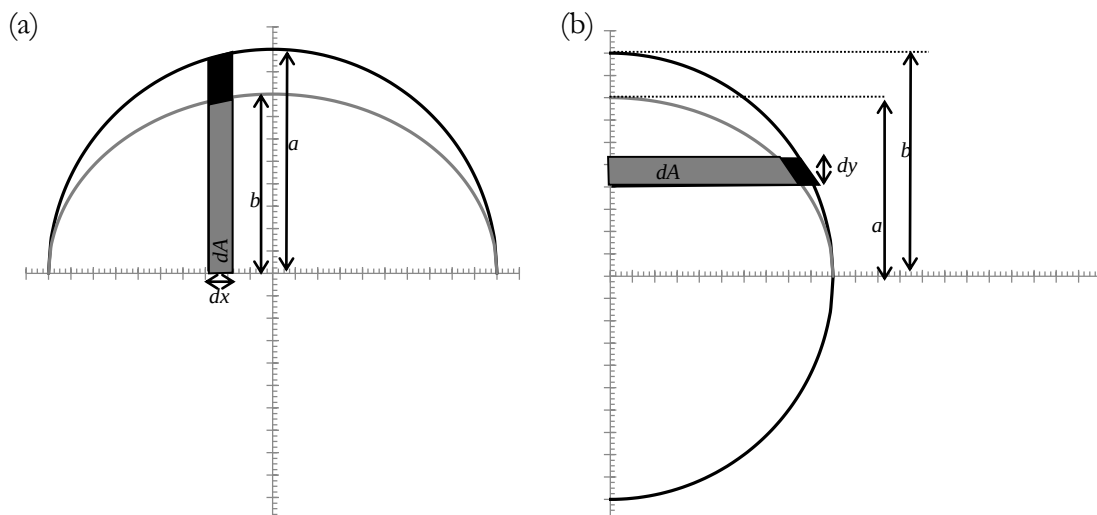
$$A = \pi ab \dots\dots\dots (45)$$

$$A = \pi a_1 b_1 - \pi a_2 b_2 \dots\dots\dots (46)$$

2. Momen pertama penampang elips

Momen pertama penampang diperlukan untuk menganalisis tegangan geser horizontal balok lentur. Tegangan geser horizontal maksimum terjadi di *centroid* sehingga momen pertama penampang

dihitung di garis netral. Studi ini menghitung momen pertama penampang untuk luas bidang setengah elips yaitu elips yang dipotong oleh sumbu x . Gambar 6a memandu penurunan formula momen pertama penampang bidang setengah elips. Persamaan 3 merupakan persamaan dasar untuk menghitung momen pertama terhadap sumbu x (Q_x). Bidang differensial dA di Gambar 6a berbentuk persegi panjang yang sangat kecil dengan lebar sebesar dx . Momen pertama penampang persegi panjang diturunkan mengacu Gambar 7. Luas bidang differensial yaitu bidang



Gambar 6. Sketsa untuk menghitung momen pertama bidang setengah elips terhadap (a) sumbu x , dan (b) sumbu y
Figure 6. Skech to calculate the half ellipse's first moment of area of (a) x -axis, and (b) y -axis

yang diarsir di Gambar 7 dihitung menggunakan Persamaan 47, sehingga momen pertama penampang bidang persegi panjang adalah Persamaan 48 yang selanjutnya disederhanakan menjadi Persamaan 49.

$$dA = bdy \dots\dots\dots (47)$$

$$Q_x = \int_0^h y b dy \dots\dots\dots (48)$$

$$Q_x = \frac{b}{2} [y^2]_0^h = \frac{bh^2}{2} \dots\dots\dots (49)$$

Sesuai Gambar 6a, Persamaan 50 merupakan momen pertama bidang differensial pecahan setengah elips karena $h = y_{elips}$ dan $b = dx$, sedangkan momen pertama bidang differensial pecahan setengah lingkaran adalah Persamaan 51. Persamaan 50 dan 51 cukup memadai karena bidang differensial pecahan wilayah lingkaran maupun elips tersebut menyerupai persegi panjang untuk tebal dx yang sangat kecil.

$$dQ_x \left(\frac{1}{2} elips \right) = \frac{y_{elips}^2}{2} dx \dots\dots\dots (50)$$

$$dQ_x \left(\frac{1}{2} lingkaran \right) = \frac{y_{lingkaran}^2}{2} dx \dots\dots\dots (51)$$

Substitusi Persamaan 42 ke dalam Persamaan 50 menghasilkan Persamaan 52. Selanjutnya Persamaan 51 disubstitusikan ke dalam Persamaan 52 menghasilkan Persamaan 53. Persamaan 53 diintegrasikan menjadi Persamaan 54. Persamaan 26 merupakan momen pertama setengah lingkaran sehingga bila jari-jari sebesar a maka formula momen pertama penampang adalah Persamaan 55. Substitusi Persamaan 55 ke dalam Persamaan 54 menghasilkan Persamaan 56 yang merupakan formula untuk menghitung momen pertama penampang berbentuk $\frac{1}{2}$ elips terhadap sumbu x (Q_x).

$$dQ_x \left(\frac{1}{2} elips \right) = \frac{\left(\frac{b}{a} y \frac{1}{2} lingkaran \right)^2}{2} dx$$

$$= \frac{b^2}{a^2} \frac{y^2 \frac{1}{2} lingkaran}{2} dx \dots\dots\dots (52)$$

$$dQ_x \left(\frac{1}{2} elips \right) = \frac{b^2}{a^2} dQ_x \left(\frac{1}{2} lingkaran \right) \\ = \frac{b^2}{a^2} dQ_x \left(\frac{1}{2} lingkaran \right) \dots\dots\dots (53)$$

$$Q_x \left(\frac{1}{2} elips \right) = \frac{b^2}{a^2} Q_x \left(\frac{1}{2} lingkaran \right) \\ = \frac{b^2}{a^2} Q_x \left(\frac{1}{2} lingkaran \right) \dots\dots\dots (54)$$

$$Q_x \left(\frac{1}{2} lingkaran \right) = \frac{2}{3} a^3 \dots\dots\dots (55)$$

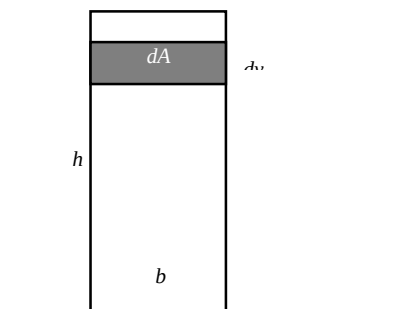
$$Q_x \left(\frac{1}{2} elips \right) = \frac{2}{3} ab^2 \dots\dots\dots (56)$$

Momen pertama penampang setengah elips terhadap sumbu y , ditunjukkan oleh Gambar 6b. Persamaan 57 diperoleh melalui prosedur serupa sebagaimana telah diuraikan oleh Persamaan 50 hingga Persamaan 56, dan dipergunakan untuk menentukan momen pertama penampang berbentuk setengah elips terhadap sumbu y . Momen pertama bidang setengah elips yang dihitung menggunakan Persamaan 57 merupakan seluruh potongan bidang elips yang terletak di sebelah kanan sumbu y (Gambar 6b).

$$Q_y = \frac{2}{3} a^2 b \dots\dots\dots (57)$$

2. Centroid bidang elips

Centroid bidang elips terletak di titik pusatnya yaitu pada koordinat (0, 0), karena sumbu x dan y merupakan sumbu simetri cermin (Gambar 5). Pada kasus ini, sumbu x adalah garis netral balok lentur yang menerima beban vertikal, sedangkan sumbu y adalah garis netral balok yang dibebani horisontal.



Gambar 7. Sketsa untuk menurunkan rumus momen pertama penampang persegi panjang
Figure 7. Skech to derive the first momen of rectangular section

3. Momen inersia penampang elips

Sketsa grafik Gambar 8a membantu menurunkan formula momen inersia suatu bidang elips terhadap sumbu x (I_x). Bidang differensial pada Gambar 8a berbentuk persegi panjang karena dx sangat kecil. Persamaan umum momen inersia penampang persegi panjang terhadap sumbu x (Persamaan 7) disesuaikan menjadi Persamaan 58 untuk kasus ini. Lebih lanjut momen inersia terhadap sumbu x yang melalui *centroid* (I_{xc}), diperhitungkan berdasarkan teorema sumbu sejajar (Persamaan 59), lalu disederhanakan menjadi Persamaan 60. Notasi y di Persamaan 59 merupakan jarak perpindahan sumbu dari sisi bawah persegi panjang ke *centroid* (setengah tinggi), sedangkan A adalah luas bidang persegi panjang.

$$I_x = \int_0^h y^2 b dy = \frac{1}{3} b [y^3]_0^h = \frac{bh^3}{3} \quad (58)$$

$$I_x = I_{xc} + y^2 A \quad (59)$$

$$I_{xc} = \frac{bh^3}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12} \quad (60)$$

Tampak di Gambar 8a, bidang-bidang differensial pecahan elips berbentuk persegi panjang yang memiliki dimensi lebar (b) sebesar dx , dan tinggi (h) sebesar y_{elips} . *Centroid* bidang differensial tersebut berimpit dengan sumbu x karena sumbu x merupakan sumbu simetrinya, sehingga momen inersia bidang differensial dihitung menggunakan Persamaan 60, yang selanjutnya disesuaikan notasinya menjadi Persamaan 61. Agar dapat dibandingkan dengan momen inersia lingkaran, Persamaan 42 disubstitusikan ke dalam Persamaan 61 menjadi

Persamaan 62, dan diubah menjadi Persamaan 63. Momen inersia bidang differensial lingkaran adalah Persamaan 64, sehingga momen inersia bidang differensial elips adalah Persamaan 65. Persamaan 64 disubstitusikan ke Persamaan 63 sehingga Persamaan 65 didapatkan. Integral persamaan 65 adalah Persamaan 66. I_x (lingkaran) adalah Persamaan 37 dan untuk lingkaran yang memiliki jari-jari a adalah Persamaan 67, maka substitusi Persamaan 67 ke dalam Persamaan 66 menjadi Persamaan 68 merupakan formula untuk menghitung momen inersia elips terhadap sumbu x (I_x).

$$dI_x(\text{elips}) = \frac{(2y_{elips})^3}{12} dx \quad (61)$$

$$dI_x(\text{elips}) = \frac{\left(2\frac{b}{a}y_{lingkaran}\right)^3}{12} dx \quad (62)$$

$$dI_x(\text{elips}) = \frac{b^3}{a^3} \frac{(2y_{lingkaran})^3}{12} dx \quad (63)$$

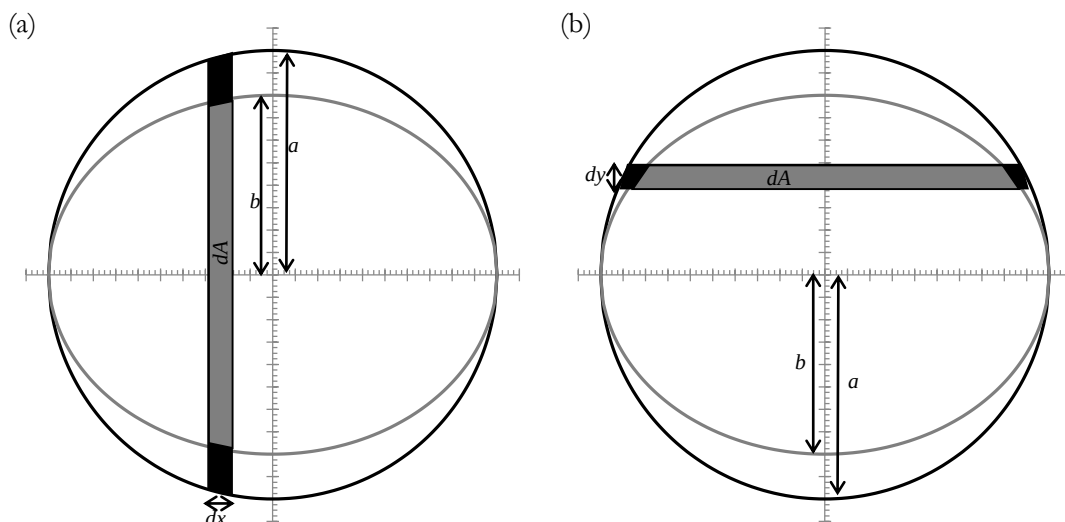
$$dI_x(\text{lingkaran}) = \frac{(2y_{lingkaran})^3}{12} dx \quad (64)$$

$$dI_x(\text{elips}) = \frac{b^3}{a^3} dI_x(\text{lingkaran}) \quad (65)$$

$$I_x(\text{elips}) = \frac{b^3}{a^3} I_x(\text{lingkaran}) \quad (66)$$

$$I_x(\text{lingkaran}) = \frac{\pi a^4}{4} \quad (67)$$

$$I_x(\text{elips}) = \frac{b^3}{a^3} \frac{\pi a^4}{4} = \frac{\pi ab^3}{4} \quad (68)$$



Gambar 8. Sketsa penurunan rumus momen inersia elips terhadap (a) sumbu x , dan (b) sumbu y
 Figure 8. Sketch to derive the formula of ellipse's moment of inertia to (a) x -axis, and (b) y -axis

Cincin elips merupakan cincin yang bagian luarnya berbentuk elips dan rongganya juga berbentuk elips (Gambar 5). Jika cincin elips memiliki sumbu semi mayor luar a_1 dan dalam a_2 , serta sumbu semi minor luar b_1 dan dalam b_2 , maka momen inersia bidang cincin elips adalah Persamaan 69. Keduanya keliling luar dan keliling dalam cincin elips pada kasus ini berbentuk elips, dan sebagai konsekwensinya dinding cincin elips mungkin tidak sama tebal. Tebal dinding cincin elips merupakan sumbu mayor tepi luar dan dalam, serta selisih sumbu semi minor tepi luar dan dalam. Jika selisih sumbu semi mayor luar dan dalam berbeda nilainya dibandingkan selisih sumbu semi minor luar dan dalam berbeda nilainya, maka tebal dinding cincin elips juga berbeda.

$$I_x = \frac{\pi}{4} (a_1^3 b_1^3 - a_2^3 b_2^3) \dots\dots\dots (69)$$

Gambar 8b membantu menurunkan rumus momen inersia bidang elips terhadap sumbu y (I_y). Serupa dengan prosedur menurunkan rumus I_x , maka I_y penampang elips dapat diperoleh (Persamaan 70), sedangkan untuk elips berongga adalah Persamaan 71.

$$I_y = \frac{\pi a^3 b}{4} \dots\dots\dots (70)$$

$$I_y = \frac{\pi}{4} (a_1^3 b_1 - a_2^3 b_2) \dots\dots\dots (71)$$

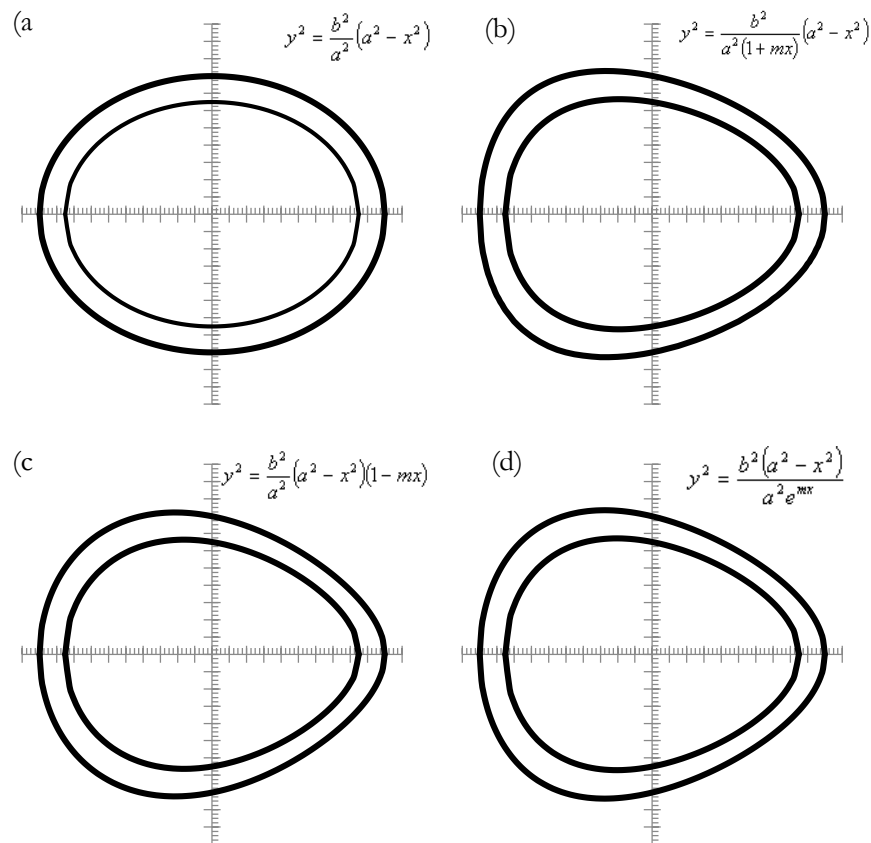
Rumus-rumus sifat-sifat penampang cincin elips sebagaimana diuraikan di atas digunakan untuk mengepas bentuk penampang batang bambu. Nilai sifat-sifat penampang keempat jenis bambu yang diidealisasi menjadi bentuk elips disajikan di Tabel 3.

C. Bentuk Penampang Bulat Telur

Di samping lingkaran dan elips, bentuk geometri bulat telur merupakan kandidat ketiga yang memadai untuk mengidealisasikan bentuk penampang buluh bambu. Bentuk bulat telur memiliki sebuah sumbu simetri cermin yang berimpit dengan sumbu mayornya. Bentuk bulat telur diperoleh dengan cara memodifikasi tinggi bidang elips sedemikian rupa sehingga salah satu sisi (di sebelah kiri atau kanan) sumbu x menjadi lebih besar daripada sisi lainnya. Fungsi pemodifikasi tersebut dapat diambil dari gugus fungsi linier, *power*, atau eksponensial. Persamaan umum kurva bulat telur ditunjukkan Persamaan 15, 16, dan 17. Selain mengepas keliling luar dinding buluh bambu, bentuk bulat telur juga dapat mengepas keliling rongga ruas bambu. Pengepasan keliling luar dan dalam dinding buluh bambu menghasilkan bentuk ideal cincin bulat telur. Gambar 9b, 9c, dan 9d, merupakan grafik cincin bulat telur yang dibangun dengan cara memodifikasi cincin elips (Gambar 9a) menggunakan fungsi linier, *power*, atau eksponensial.

Tabel 3. Nilai sifat-sifat penampang bambu yang didekati dengan bentuk cincin elips
Table 3. Bamboo's cross-section properties which are idealized as ellipse ring

Deskripsi (Description)	<i>G. apus</i>	<i>B. vulgaris</i>	<i>G. pseudoarundinacea</i>	<i>G. robusta</i>
Rata-rata sumbu semi mayor tepi luar (Average outer semi major axis) (a_1 , cm)	4,32	3,59	4,39	4,24
Rata-rata sumbu semi minor tepi luar (Average outer semi major minor) (b_1 , cm)	4,27	3,27	4,27	4,00
Rata-rata tebal dinding (Average culm-wall thickness) (t , cm)	1,00	0,90	1,25	1,10
Rata-rata sumbu semi mayor rongga (a_2 , cm) (Average cavity semi major axis) (a_2 , cm)	3,32	2,69	3,14	3,14
Rata-rata sumbu semi minor rongga (Average cavity semi minor axis) (b_2 , cm)	3,27	2,37	3,02	2,90
Luas area penampang (Culm-wall area, A , cm ²)	23,81	16,82	29,10	24,67
Momen pertama setengah elips (First moment of half ellipse section, cm ³):				
Q_x	28,77	15,47	34,27	27,62
Q_y	29,02	16,61	35,01	28,88
Centroid coordinate ($\bar{x}$, $\bar{y}$)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
Momen inersia penampang (Moment of inertia) (I , cm ⁴)				
I_x	172,30	70,11	200,51	152,98
I_y	175,71	82,20	210,30	168,95



Gambar 9 (a) Cincin elips dimodifikasi menjadi cincin bulat telur menggunakan fungsi (b) linier, (c) power, dan (d) eksponensial
Figure 9 (a) Ellipse ring is modified into egg-shape ring using (b) linear, (c) power, and (d) exponential function

1. Luas area bidang bulat telur

Luas area bidang bulat telur dihitung dengan mengintegralkan persamaan umumnya untuk seluruh wilayah x yaitu $-a < x < a$. (Persamaan 72). Persamaan di dalam notasi integral menunjukkan luas di bawah kurva, yaitu wilayah yang dibatasi oleh kurva bulat telur dan sumbu x sehingga bentuknya adalah setengah bulat telur. Simetri cermin menghasilkan bentuk yang setangkup dengan kurva di bawahnya, maka faktor pengali bernilai 2 (dua) diberikan. Masing-masing fungsi ($f(x)$) disubstitusikan sehingga Persamaan 73, 74, dan 75 diperoleh. Jika $f(x)$ berupa konstanta yang bernilai 1 maka bentuk geometrinya adalah elips.

$$A = 2 \int_{-a}^a \frac{b}{f(x)} \sqrt{a^2 - x^2} dx \dots\dots\dots (72)$$

$$A = 2 \int_{-a}^a \frac{b}{(1+mx)} \sqrt{a^2 - x^2} dx \dots\dots\dots (73)$$

$$A = 2 \int_{-a}^a \frac{b}{\sqrt{(a^2 - x^2)(1-mx)}} dx \dots\dots\dots (74)$$

$$A = 2 \int_{-a}^a \frac{b}{e^{mx}} \sqrt{a^2 - x^2} dx \dots\dots\dots (75)$$

Nilai-nilai sumbu mayor (a), sumbu minor (b), dan koefisien (m) diukur untuk setiap jenis bambu, dan luasnya dihitung menggunakan Persamaan 73, 74, atau 75. Sebagai contoh diasumsikan nilai m adalah 0.06, serta nilai a dan b adalah jari-jari maksimum dan minimum buluh bambu, Persamaan 73, 74, atau 75 dapat dimanfaatkan untuk menghitung luas dinding buluh bambu yang diidealisasikan berbentuk cincin bulat telur (Tabel 4).

2. Momen pertama bidang bulat telur

Momen pertama terhadap sumbu x (I_x) diformulasikan untuk bidang setengah bulat telur, yang terletak di bawah kurva dan di atas sumbu x . Bidang setengah bulat telur dipecah-pecah menjadi bidang differensial sebanyak tak hingga (Gambar 10). Bidang differensial berbentuk persegi panjang dan Persamaan 49 merupakan rumus momen pertamanya. Persamaan 49 disesuaikan notasinya untuk bidang differensial di Gambar 10 sehingga diperoleh

Tabel 4. Luas penampang bambu yang didekati dengan bentuk bulat telur

Table 4. Bamboo culm's cross-section area idealized as egg-shape

Deskripsi (Description)	<i>G. apus</i>	<i>B. vulgaris</i>	<i>G. pseudoarundinacea</i>	<i>G. robusta</i>
Sumbu semi mayor tepi luar (Outer semi major axis) (a_1 , cm)	4,32	3,59	4,39	4,24
Sumbu semi minor tepi luar (Inner semi minor axis) (b_1 , cm)	4,27	3,27	4,27	4,00
Tebal dinding (Culm-wall thickness) (t , cm)	1,0	0,9	1,25	1,1
Sumbu semi mayor rongga (Cavity semi major axis) (a_2 , cm)	3,32	2,69	3,14	3,14
Sumbu semi minor rongga (Cavity semi minor axis) (b_2 , cm)	3,27	2,37	3,02	2,90
Luas area tepi luar dihitung dengan: (Outer area calculated by:				
Persamaan (Equation) 73 (linier)	58,19	36,93	59,28	53,61
Persamaan (Equation) 74 (power)	57,69	18,36	29,38	26,59
Persamaan 75 (Equation) (eksponensial)	57,94	36,83	59,02	53,39
Luas area rongga dihitung dengan: (Cavity area calculated by:				
Persamaan (Equation) 73 (linier)	34,13	20,00	29,89	28,70
Persamaan (Equation) 74 (power)	16,98	9,66	14,88	14,29
Persamaan 75 (Equation) (eksponensial)	34,05	19,97	29,82	28,64
Luas area dinding batang bambu dihitung dengan: (Culm-wall area calculated by:				
Persamaan (Equation) 73 (linier)	24,06	16,94	29,39	24,91
Persamaan (Equation) 74 (power)	40,71	8,69	14,50	12,30
Persamaan 75 (Equation) (eksponensial)	23,89	16,86	29,19	24,75

$$dQ_x = \frac{y^2}{2} dx \dots\dots\dots (76)$$

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{f(x)}} \dots\dots\dots (77)$$

$$dQ_x = \frac{b^2}{2a^2} \frac{(a^2 - x^2)}{f(x)} dx \dots\dots\dots (78)$$

$$Q_x = \frac{b^2}{2a^2} \int_{-a}^a \frac{(a^2 - x^2)}{f(x)} dx \dots\dots\dots (79)$$

$$Q_x = \frac{b^2}{2a^2} \int_{-a}^a \frac{(a^2 - x^2)}{1 + mx} dx \dots\dots\dots (80)$$

$$Q_x = \frac{b^2}{2a^2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2)(1 - mx) dx \dots\dots\dots (81)$$

$$Q_x = \frac{b^2}{2a^2} \int_{-a}^a \frac{(a^2 - x^2)}{e^{mx}} dx \dots\dots\dots (82)$$

$$Q_x = \frac{b^2}{2a^2} \left(\int_{-a}^a \frac{a^2}{1 + mx} dx - \int_{-a}^a \frac{x^2}{1 + mx} dx \right)$$

$$= \frac{b^2}{2a^2} \left(\int_{-a}^a \frac{a^2}{1 + mx} \frac{d(1 + mx)}{m} - \frac{1}{m^2} \int_{-a}^a \frac{(1 - (1 + mx)(1 - mx))}{1 + mx} dx \right)$$

$$= \frac{b^2}{2a^2} \left(\frac{a^2}{m} \int_{-a}^a \frac{d(1 + mx)}{1 + mx} - \frac{1}{m^2} \left(\int_{-a}^a \frac{dx}{1 + mx} - \int_{-a}^a (1 - mx) dx \right) \right)$$

$$= \frac{b^2}{2a^2} \left(\frac{a^2}{m} [\ln(1 + mx)]_{-a}^a - \frac{1}{m^2} \left(\left[\frac{1}{m} \ln(1 + mx) \right]_{-a}^a - \left[x - \frac{1}{2} mx^2 \right]_{-a}^a \right) \right)$$

$$= \frac{b^2}{2a^2} \left(\frac{a^2}{m} (\ln(1 + ma) - \ln(1 - ma)) - \frac{1}{m^2} \left(\frac{1}{m} (\ln(1 + ax) - \ln(1 - ax)) - 2a \right) \right)$$

$$= \frac{b^2}{2m} (\ln(1 + ma) - \ln(1 - ma)) - \frac{b^2}{2a^2 m^3} (\ln(1 + ax) - \ln(1 - ax)) + \frac{b^2}{m^2 a}$$

$$= \frac{b^2}{2m} \left(\ln \left(\frac{1 + ax}{1 - ax} \right) - \frac{1}{a^2 m^2} \ln \left(\frac{1 + ax}{1 - ax} \right) + \frac{2}{am} \right) \dots\dots\dots (83)$$

$$Q_x = \frac{b^2}{2a^2} \int_{-a}^a (a^2 - a^2 mx - x^2 + mx^3) dx$$

$$= \frac{b^2}{2a^2} \left[a^2 x - \frac{a^2 m}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 + \frac{m}{4} x^4 \right]_{-a}^a = \frac{2}{3} ab^2 \dots\dots\dots (84)$$

$$Q_x = \frac{b^2}{2a^2} \left(\int_{-a}^a \frac{a^2}{e^{mx}} dx - \int_{-a}^a \frac{x^2}{e^{mx}} dx \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b^2}{2a^2} \left(\frac{1}{m^3} \int_{-a}^a \frac{(ma)^2}{e^{mx}} d(mx) - \frac{1}{m^3} \int_{-a}^a \frac{(mx)^2}{e^{mx}} d(mx) \right) \\
&= \frac{b^2}{2a^2 m^3} \left(m^2 a^2 \int_{-a}^a \frac{1}{e^{mx}} d(mx) - \int_{-a}^a \frac{(mx)^2}{e^{mx}} d(mx) \right) \\
&= \frac{b^2}{2a^2 m^3} \left(m^2 a^2 \left[-e^{-mx} \right]_{-a}^a - \left[-\frac{m^2 x^2 + 2mx + 2}{e^{mx}} \right]_{-a}^a \right) \\
&= \frac{b^2}{2a^2 m^3} \left(m^2 a^2 (-e^{-ma} + e^{ma}) - \left(-\frac{m^2 a^2 + 2ma + 2}{e^{-ma}} + \frac{m^2 a^2 + 2ma + 2}{e^{ma}} \right) \right) \\
&= \frac{b^2}{a^2 m^3} \left((ma - 1)e^{ma} + (ma + 1)e^{-ma} \right) \dots\dots\dots (85)
\end{aligned}$$

Selain momen pertama terhadap sumbu x (Q_x), momen pertama terhadap sumbu y (Q_y) juga diperlukan. Sumbu y bidang bulat telur bukan merupakan sumbu simetri sehingga garis bantu (x') diperlukan. Garis bantu (x') dipilih berpotongan di puncak kurva, sehingga satu garis horisontal hanya dapat memotong satu titik di sebelah kiri garis bantu dan satu titik di sebelah kanan garis bantu. (Gambar 10b). Puncak kurva merupakan titik stasioner yang memiliki kemiringan (*slope*) bernilai nol, sehingga garis bantu dipilih di titik x tertentu ketika turunan pertama kurva bernilai 0 (nol) (Persamaan 86). Persamaan 87, 88, dan 89 diperoleh dengan mensubstitusi $f(x)$ dengan fungsi linier, *power*, dan eksponensial.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{f(x)}} \right) = 0 \dots\dots\dots (86)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{1 + mx}} \right) = 0 \dots\dots\dots (87)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)(1 - mx)} \right) = 0 \dots\dots\dots (88)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{e^{mx}}} \right) = 0 \dots\dots\dots (89)$$

Persamaan 87 diolah lebih lanjut di Persamaan 90 dan 92, sehingga solusi bagi garis bantu kurva bulat telur yang diperoleh dari modifikasi kurva elips menggunakan fungsi linier adalah Persamaan 93 dan 94.

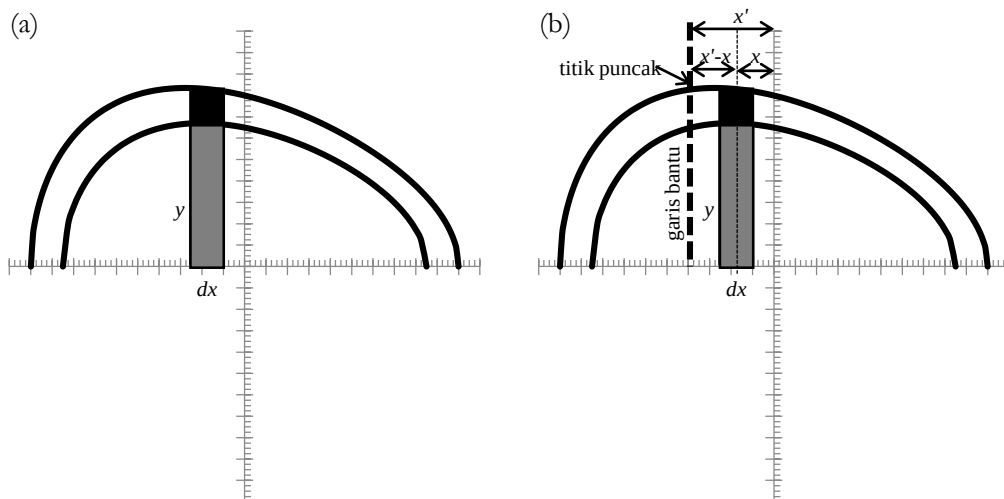
$$\frac{1}{2} \frac{b \left(-\frac{2x}{mx+1} - \frac{(a^2 - x^2)m}{(mx+1)^2} \right)}{a \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{mx+1}}} = 0 \dots\dots\dots (90)$$

$$\frac{2x(mx+1) + (a^2 - x^2)m}{(mx+1)^2} = 0 \dots\dots\dots (91)$$

$$mx^2 + 2x + (ma^2) = 0 \dots\dots\dots (92)$$

$$x'_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4m^2 a^2}}{2m} \dots\dots\dots (93)$$

$$x'_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - m^2 a^2}}{m} \dots\dots\dots (94)$$



Gambar 10 (a) Sketsa setengah bulat telur untuk menurunkan momen pertama penampang terhadap sumbu x (Q_x), dan (b) sumbu y (Q_y)

Figure 10 (a) Sketch of half egg-shape derive the first momen of area to x -axis (Q_x), and (b) y -axis (Q_y)

Dengan cara serupa, garis bantu bagi kurva bulat telur yang diperoleh dengan memodifikasi kurva elips menggunakan fungsi *power* (Persamaan 88) diuraikan dan diselesaikan seperti yang ditunjukkan Persamaan 95 sampai 99.

$$\frac{1}{2} \frac{b(-2x(1-mx) - (a^2 - x^2)m)}{a\sqrt{(a^2 - x^2)(1-mx)}} = 0 \dots\dots\dots (95)$$

$$(-2x(1-mx) - (a^2 - x^2)m) = 0 \dots\dots\dots (96)$$

$$3mx^2 - 2x - ma^2 = 0 \dots\dots\dots (97)$$

$$x'_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 12m^2a^2}}{6m} \dots\dots\dots (98)$$

$$x'_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 3m^2a^2}}{3m} \dots\dots\dots (99)$$

Sedangkan Persamaan 100 sampai 104 menguraikan Persamaan 89 dan menyelesaikan rumus garis bantu untuk kurva bulat telur yang diperoleh dengan modifikasi elips menggunakan fungsi eksponensial.

$$\frac{1}{2} \frac{b(-2x - (a^2 - x^2)m)}{ae^{mx} \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{e^{mx}}}} = 0 \dots\dots\dots (100)$$

$$(-2x - (a^2 - x^2)m) = 0 \dots\dots\dots (101)$$

$$mx^2 - 2x - ma^2 = 0 \dots\dots\dots (102)$$

$$x'_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4m^2a^2}}{2m} \dots\dots\dots (103)$$

$$x'_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + m^2a^2}}{m} \dots\dots\dots (104)$$

Tabel 5. Momen pertama setengah penampang bambu terhadap sumbu x (Q_x) yang didekati dengan bentuk setengah bulat telur

Table 5. Bamboo culm's half cross-section first moment of area to x-axis (Q_x) idealized as half egg-shape

Deskripsi (Description)	<i>G. apus</i>	<i>B. vulgaris</i>	<i>G. pseudoarundinacea</i>	<i>G. robusta</i>
Sumbu semi mayor tepi luar (Outer semi major axis) (a_1 , cm)	4,32	3,59	4,39	4,24
Sumbu semi minor tepi luar (Outer semi minor axis) (b_1 , cm)	4,27	3,27	4,27	4,00
Tebal dinding (Culm-wall thickness) (t , cm)	1,00	0,90	1,25	1,10
Sumbu semi mayor rongga (Cavity semi major axis) (a_2 , cm)	3,32	2,69	3,14	3,14
Sumbu semi minor rongga (Cavity semi minor axis) (b_2 , cm)	3,27	2,37	3,02	2,90
Momen pertama setengah tepi luar dihitung dengan: (First moment of half outer area calculated by:)				
Persamaan (Equation) 83	53,05	25,72	54,13	45,83
Persamaan (Equation) 84	52,33	25,48	53,36	45,23
Persamaan (Equation) 85	52,68	25,60	53,73	45,52
Momen pertama setengah rongga dihitung dengan: (First moment of half cavity area calculated by:)				
Persamaan (Equation) 83	23,75	10,06	19,23	17,73
Persamaan (Equation) 84	23,56	10,01	19,09	17,60
Persamaan (Equation) 85	23,65	10,04	19,16	17,67
Momen pertama dinding batang bambu (cincin setengah bulat telur) dihitung dengan: (First moment of half culm-wall area calculated by:)				
Persamaan (Equation) 83	29,30	15,65	34,90	28,10
Persamaan (Equation) 84	28,77	15,47	34,27	27,62
Persamaan (Equation) 85	29,03	15,56	34,57	27,85

Catatan (Note): $m=0.06$

Tabel 6. Garis bantu (x') dipilih di puncak kurva untuk menghitung momen pertama setengah penampang bambu terhadap sumbu y (Q_y) yang didekati dengan bentuk setengah telur

Table 6. Help line (x') is chosen at the curve peak to calculate the first moment of area to y -axis (Q_y) of bamboo culm's half cross section which is idealized as half egg-shape

Deskripsi (Description)	<i>G. apus</i>		<i>B. vulgaris</i>		<i>G. pseudoarundinacea</i>		<i>G. robusta</i>	
Sumbu semi mayor tepi luar (Outer semi major axis) (a_1 , cm)	4,315		3,585		4,39		4,24	
Sumbu minor tepi luar (Outer semi minor axis) (b_1 , cm)	4,265		3,265		4,27		4	
Tebal dinding (Culm wall thickness) (t , cm)	1,0		0,9		1,25		1,1	
Sumbu mayor rongga (Cavity semi major axis) (a_2 , cm)	3,315		2,685		3,14		3,14	
Sumbu minor rongga (Cavity semi minor axis) (b_2 , cm)	3,265		2,365		3,02		2,9	
Garis bantu tepi luar (Help-line for outer shape)	x'_1	x'_2	x'_1	x'_2	x'_1	x'_2	x'_1	x'_2
Persamaan (Equation) 94	-0,57	-32,77	-0,39	-32,94	-0,59	-32,74	-0,55	-32,78
Persamaan (Equation) 99	11,76	-0,65	11,56	-0,45	11,78	-0,67	11,74	-0,62
Persamaan (Equation) 104	33,88	-0,55	33,71	-0,38	33,90	-0,57	33,86	-0,53
Garis bantu rongga (Help-line for cavity shape)	x'_1	x'_2	x'_1	x'_2	x'_1	x'_2	x'_1	x'_2
Persamaan (Equation) 94	-0,33	-33,00	-0,22	-33,12	-0,30	-33,03	-0,30	-33,03
Persamaan (Equation) 99	11,50	-0,39	11,37	-0,26	11,46	-0,35	11,46	-0,35
Persamaan (Equation) 104	33,66	-0,33	33,55	-0,21	33,63	-0,29	33,63	-0,29

Catatan (Note): $m=0.06$. Sel yang diarsir merupakan nilai rasional yang dipilih sebagai garis bantu. (Shadowed cell is the chosen rational values as the help-lines).

Garis bantu (x') setiap kurva diplotkan pada posisi x sebagaimana didaftarkan pada Tabel.6 (Gambar 10b). Garis bantu memotong puncak kurva secara tegak lurus, sehingga nilai-nilai garis bantu berada di selang $-a \leq x \leq a$. Garis bantu yang memenuhi syarat telah ditampilkan dalam sel yang diarsir di Tabel 6. Tampak di Tabel 6, semua nilai garis bantu yang rasional memiliki tanda negatif. Tanda negatif memperlihatkan puncak kurva yaitu titik yang dipilih menjadi garis bantu terletak di sebelah kiri sumbu y .

Sesuai definisi momen pertama penampang (Persamaan 4) serta mengacu pada Gambar 10b, Persamaan 105 merupakan rumus momen pertama penampang setengah bulat telur terhadap garis bantu (x'). Luas penampang differensial (dA) adalah ydx , sehingga Persamaan 105 dimodifikasi menjadi Persamaan 106. Persamaan 107 merupakan tinggi kurva bulat telur sehingga Persamaan 106 dimodifikasi menjadi Persamaan 108. Fungsi linier, power, dan eksponensial selanjutnya disubstitusikan ke Persamaan 108 sehingga menghasilkan Persamaan 109, 110, dan 111.

$$Q_y = \int_A (x'-x) dA \dots\dots\dots (105)$$

$$Q_y = \int_x (x'-x) y dx \dots\dots\dots (106)$$

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{f(x)}} \dots\dots\dots (107)$$

$$Q_y = \int_x (x'-x) \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{f(x)}} dx \dots\dots\dots (108)$$

$$Q_y = \int_x (x'-x) \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{1 + mx}} dx \dots\dots\dots (109)$$

$$Q_y = \int_x (x'-x) \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)(1 - mx)} dx \dots\dots\dots (110)$$

$$Q_y = \int_x (x'-x) \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{e^{mx}}} dx \dots\dots\dots (111)$$

Solusi bagi Persamaan 109 untuk wilayah di sebelah kanan garis bantu ($x' \leq x \leq a$) adalah Persamaan 112, dan untuk di sebelah kiri ($-a \leq x \leq x'$) adalah Persamaan 113. Tabel 7 menunjukkan momen pertama terhadap garis bantu yang diperoleh dari Persamaan 113.

Tabel 7. Momen pertama penampang (Q_y) terhadap garis bantu (x')

Table 7. First moment of area (Q_y) about the help line (x')

Deskripsi (Description)	<i>G. apus</i>		<i>B. vulgaris</i>		<i>G. pseudoarundinacea</i>		<i>G. robusta</i>	
Sumbu semi mayor tepi luar (Outer semi major axis) (a_1 , cm)	4,32		3,59		4,39		4,24	
Sumbu semi minor tepi luar (Outer semi minor axis) (b_1 , cm)	4,27		3,27		4,27		4,00	
Tebal dinding (Culm wall thickness) (t , cm)	1,00		0,90		1,25		1,10	
Sumbu semi mayor rongga(a_2) (Cavity semi major axis) (a_2 , cm)	3,32		2.69		3,14		3,14	
Sumbu semi minor rongga(b_2) (Cavity semi minor axis) (b_2 , cm)	3,27		2,37		3,02		2,90	
Momen Pertama tepi luar (First moment of the outer area (Q_y))	Kanan <i>Right</i>	Kiri <i>Left</i>	Kanan <i>Right</i>	Kiri <i>Left</i>	Kanan <i>Right</i>	Kiri <i>Left</i>	Kanan <i>Right</i>	Kiri <i>Left</i>
Persamaan (Equations) 112 & 113	-33,21	20,75	-16,87	11,47	-34,55	21,41	-29,95	18,88
Persamaan (Equations) 114 & 115	-32,82	20,43	-16,73	11,35	-34,12	21,06	-29,61	18,59
Persamaan (Equations) 116 & 117	-33,04	20,57	-16,81	11,40	-34,36	21,21	-29,81	18,72
Momen Pertama rongga (First moment of the cavity area) (Q_y)	Kanan <i>Right</i>	Kiri <i>Left</i>	Kanan <i>Right</i>	Kiri <i>Left</i>	Kanan <i>Right</i>	Kiri <i>Left</i>	Kanan <i>Right</i>	Kiri <i>Left</i>
Persamaan (Equations) 112 & 113	-14,20	9,98	-6,55	4,90	-11,71	8,34	-11,24	8,01
Persamaan (Equations) 114 & 115	-14,10	9,90	-6,52	4,87	-11,63	8,27	-11,17	7,94
Persamaan (Equations) 116 & 117	-14,15	9,94	-6,54	4,29	-11,68	8,30	-11,21	7,97

Catatan (Note): $m=0.06$

$$Q_y = \int_{x'}^a (x'-x) \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2-x^2}{1+mx}} dx \dots\dots\dots (112)$$

$$Q_y = \int_{-a}^{x'} (x'-x) \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2-x^2}{1+mx}} dx \dots\dots\dots (113)$$

Persamaan 110 diselesaikan menjadi Persamaan 114 untuk wilayah di sebelah kanan garis bantu, dan Persamaan 115 untuk wilayah di sebelah kiri garis bantu. Prosedur serupa diterapkan untuk menyelesaikan Persamaan 111 menjadi Persamaan 116 dan 117, dan hasilnya disajikan di Tabel 7.

$$Q_y = \int_{x'}^a (x'-x) \frac{b}{a} \sqrt{(a^2-x^2)(1-mx)} dx \dots\dots\dots (114)$$

$$Q_y = \int_{-a}^{x'} (x'-x) \frac{b}{a} \sqrt{(a^2-x^2)(1-mx)} dx \dots\dots\dots (115)$$

$$Q_y = \int_{x'}^a (x'-x) \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2-x^2}{e^{mx}}} dx \dots\dots\dots (116)$$

$$Q_y = \int_{-a}^{x'} (x'-x) \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2-x^2}{e^{mx}}} dx \dots\dots\dots (117)$$

3. Centroid bidang bulat telur

Bidang bulat telur memiliki satu sumbu simetri cermin yaitu sumbu x (absis). Sumbu simetri cermin

ini merupakan garis netral ($\bar{y}$) untuk balok yang menerima beban lentur arah vertikal. Sedangkan *centroid* yang sejajar dengan sumbu y ($\bar{x}$) dihitung sejauh jarak tertentu dari garis bantu (x') menggunakan Persamaan 5. Mengacu pada Persamaan 5, nilai momen pertama penampang (Q_y), dan luas area (A) diperlukan untuk menentukan *centroid* ($\bar{y}$). Luas area cincin bulat telur telah disajikan di Tabel 4 sedangkan momen pertama penampang tersedia di Tabel 6. Nilai-nilai A pada Tabel 4, dan Q_y pada Tabel 6 disubstitusikan ke dalam Persamaan 5, sehingga diperoleh jarak *centroid* ($\bar{x}$) bidang bulat telur terhadap garis bantu seperti disajikan di Tabel 7. Kemudian, posisi *centroid* (jarak terhadap sumbu y) diplotkan di koordinat *Cartesius* dengan Persamaan 117, dan hasilnya ditampilkan di Tabel 8. Jarak *centroid* cincin bulat telur dihitung menggunakan Persamaan 118, dan Tabel 9 mendaftarkannya.

$$\bar{x} = x' + \bar{x}' \dots\dots\dots (117)$$

$$\bar{x}' = \frac{\bar{x}_1 A_1 - \bar{x}_2 A_2}{A_1 - A_2} \dots\dots\dots (118)$$

4. Momen inersia bidang bulat telur

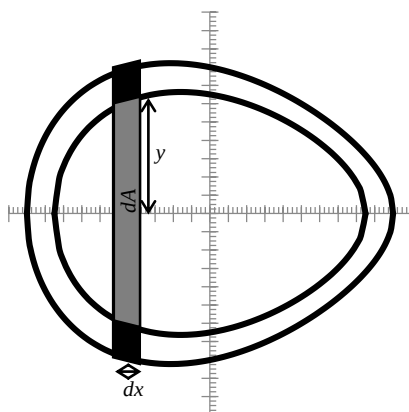
Momen inersia bidang bulat telur dihitung mengacu pada Gambar 11.

Tabel 8. Jarak *centroid* ($\bar{x}$) bidang setengah bulat telur dari garis bantu (x')**Table 8. Distance half egg-shape section's centroid ($\bar{x}$) to the help line (x')**

Deskripsi (Description)	<i>G. apus</i>		<i>B. vulgaris</i>		<i>G. pseudoarundinacea</i>		<i>G. robusta</i>	
	Kanan <i>Right</i>	Kiri <i>Left</i>	Kanan <i>Right</i>	Kiri <i>Left</i>	Kanan <i>Right</i>	Kiri <i>Left</i>	Kanan <i>Right</i>	Kiri <i>Left</i>
Momen pertama tepi luar (First moment of outer area (Q_y))								
Persamaan (Equations) 112 & 113	-33,21	20,75	-16,87	11,47	-34,55	21,41	-29,95	18,88
Jumlah (Sum)	-12,46		-5,4		-13,14		-11,07	
Persamaan (Equations) 114 & 115	-32,82	20,43	-16,73	11,35	-34,12	21,06	-29,61	18,59
Jumlah (Sum)	-12,39		-5,38		-13,06		-11,02	
Persamaan (Equations) 116 & 117	-33,04	20,57	-16,81	11,4	-34,36	21,21	-29,81	18,72
Jumlah (Sum)	-12,47		-5,41		-13,15		-11,09	
Momen pertama rongga (First moment of cavity area (Q_v))								
Persamaan (Equations) 112 & 113	-14,2	9,98	-6,55	4,90	-11,71	8,34	-11,24	8,01
Jumlah (Sum)	-4,22		-1,65		-3,37		-3,23	
Persamaan (Equations) 114 & 115	-14,1	9,9	-6,52	4,87	-11,63	8,27	-11,17	7,94
Jumlah (Sum)	-4,2		-1,65		-3,36		-3,23	
Persamaan (Equations) 116 & 117	-14,15	9,94	-6,54	4,29	-11,68	8,3	-11,21	7,97
Jumlah (Sum)	-4,21		-2,25		-3,38		-3,24	
Luas bidang setengah bulat telur tepi luar (Outer area half egg-shape (A , cm ²))								
Persamaan (Equation) 73 linier	29,09		18,47		29,64		26,81	
Persamaan (Equation) 74 power	28,85		9,18		14,69		13,29	
Persamaan (Equation) 75 eksponensial	28,97		18,41		29,51		26,69	
Luas bidang setengah bulat telur rongga (Cavity area half egg-shape (A , cm ²))								
Persamaan (Equation) 73 linier	17,07		10,00		14,95		14,35	
Persamaan (Equation) 74 power	8,49		4,83		7,44		7,14	
Persamaan (Equation) 75 eksponensial	17,02		9,98		14,91		14,32	
Centroid tepi luar dari garis bantu (Centroid of outer area from help-line) (c , cm)								
Linier	-0,43		-0,29		-0,44		-0,41	
Power	-0,43		-0,59		-0,89		-0,83	
Eksponensial	-0,15		-0,12		-0,11		-0,12	
Centroid rongga								
Linier	-0,25		-0,17		-0,23		-0,23	
Power	-0,49		-0,34		-0,45		-0,45	
Eksponensial	-0,25		-0,23		-0,23		-0,23	

Tampak di Gambar 11, penampang bulat telur dipecah-pecah menjadi sebanyak tak terhingga bidang differensial berukuran sangat kecil. Setiap bidang differensial berbentuk persegi panjang untuk tebal dx yang sangat kecil. *Centroid* bidang differensial berimpit dengan sumbu x . Setiap bidang differensial

memiliki momen inersia terhadap sumbu x sebagaimana ditunjukkan Persamaan 60 yang disesuaikan notasinya menjadi Persamaan 119. Persamaan 120 dibangun dengan mensubstitusikan persamaan umum tinggi bulat telur ke dalam Persamaan 119.



Gambar 11. Sketsa untuk menurunkan formula momen inersia penampang bulat telur
Figure 11. Sketch of egg-shape to derive its moment of inertia formula

Tabel 9. Jarak centroid ($\bar{x}$) bidang bulat telur dari sumbu y
Table 9. Distance of egg-shape section's centroid ($\bar{x}$) to y -axis

Deskripsi (Description)	<i>G. apus</i>	<i>B. vulgaris</i>	<i>G. pseudoarundinacea</i>	<i>G. robusta</i>
Jarak centroid tepi luar dari sumbu y <i>Centroid distance of outer area to y-axis</i>				
Linier	-1,00	-0,68	-1,03	-0,96
Power	-1,08	-1,04	-1,56	-1,45
Ekspensial	-0,69	-0,50	-0,68	-0,65
Jarak centroid rongga dari sumbu y <i>Centroid distance of cavity area to y-axis</i>				
Linier	-0,58	-0,38	-0,52	-0,52
Power	-0,88	-0,60	-0,80	-0,80
Ekspensial	-0,57	-0,44	-0,52	-0,52
Jarak centroid cincin bulat telur dari sumbu y <i>Centroid distance of culm-wall area to y-axis</i>				
Linier	-1,59	-1,04	-1,55	-1,47
Power	-1,16	-1,53	-2,33	-2,21
Ekspensial	-0,87	-0,58	-0,85	-0,81

$$dI_x = \frac{(2y_{oval})^3}{12} dx \dots\dots\dots (119)$$

$$dI_x = \frac{2b^3}{3a^3} \left(\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{f(x)}} \right)^3 dx \dots\dots\dots (120)$$

Momen inersia seluruh penampang bulat telur, diperoleh melalui integral Persamaan 120 untuk semua wilayah x ($-a \leq x \leq a$), adalah Persamaan 121. Masing-masing fungsi linier, *power*, atau ekspensial mensubstitusi $f(x)$ hingga Persamaan 122, 123, dan 124 diperoleh.

$$I_x = \int_{-a}^a \frac{2b^3}{3a^3} \left(\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{f(x)}} \right)^3 dx \dots\dots\dots (121)$$

$$I_x = \int_{-a}^a \frac{2b^3}{3a^3} \left(\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{1 + mx}} \right)^3 dx \dots\dots\dots (122)$$

$$I_x = \int_{-a}^a \frac{2b^3}{3a^3} \left(\sqrt{(a^2 - x^2)(1 - mx)} \right)^3 dx \dots\dots\dots (123)$$

$$I_x = \int_{-a}^a \frac{2b^3}{3a^3} \left(\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{e^{mx}}} \right)^3 dx \dots\dots\dots (124)$$

Tabel 10. Momen inersia buluh bambu terhadap sumbu x (I_x) yang didekati sebagai bulat telur
Table 10. Bamboo culm's cross-section moment of inertia to x-axis (I_x) idealized as egg-shape

Deskripsi (<i>Description</i>)	<i>G. apus</i>	<i>B. vulgaris</i>	<i>G. pseudoarundinacea</i>	<i>G. robusta</i>
Sumbu semi mayor tepi luar (<i>Outer semi major axis</i>) (a_1 , cm)	4,32	3,59	4,39	4,24
Sumbu semi minor tepi luar (b_1) (<i>Outer semi minor axis</i>) (b_1 , cm)	4,27	3,27	4,27	4,00
Tebal dinding (<i>Culm-wall thickness</i>) (t , cm)	1,00	0,90	1,25	1,10
Sumbu semi mayor rongga (a_2) (<i>Cavity semi major axis</i>) (a_2 , cm)	3,32	2,69	3,14	3,14
Sumbu semi minor rongga (<i>Cavity semi minor axis</i>) (b_2 , cm)	3,27	2,367	3,02	2,90
Momen inersia tepi luar dihitung dengan: <i>Moment of inertia of outer area calculated by:</i>				
Persamaan (<i>Equation</i>) 122	259,50	99,45	274,46	217,58
Persamaan (<i>Equation</i>) 123	262,92	98,00	268,43	213,13
Persamaan (<i>Equation</i>) 124	266,24	98,85	271,94	215,72
Momen pertama rongga dihitung dengan: <i>Moment of inertia of cavity area calculated by:</i>				
Persamaan (<i>Equation</i>) 122	91,76	28,12	68,69	60,83
Persamaan (<i>Equation</i>) 123	90,62	27,90	67,93	60,15
Persamaan (<i>Equation</i>) 124	91,29	28,03	68,38	60,55
Momen inersia dinding batang bambu dihitung dengan: <i>Moment of inertia of culm-wall area calculated by:</i>				
Persamaan (<i>Equation</i>) 122	167,74	71,33	205,77	156,75
Persamaan (<i>Equation</i>) 123	172,30	70,11	200,51	152,98
Persamaan (<i>Equation</i>) 124	174,95	70,82	203,56	155,18

Note: $m=0.06$

Penyelesaian Persamaan 122, 123, dan 124 dengan memasukkan dimensi masing-masing bambu hasil pengukuran menghasilkan momen inersia penampang lintang buluh bambu yang diidealisasi sebagaimana ditampilkan di Tabel 10.

Momen inersia penampang lintang buluh bambu terhadap sumbu y (I_y) diturunkan mengacu pada Persamaan 8 yang disesuaikan mengikuti Gambar 11. Gambar 11 menunjukkan bahwa luas bidang differensial (dA) adalah $2ydx$ (Persamaan 125), sehingga Persamaan 8 dimodifikasi menjadi Persamaan 126. Tinggi bulat telur disubstitusikan menggantikan y , sehingga Persamaan 127 diperoleh. Kemudian fungsi pemodifikasi (linier, *power*, dan eksponensial) disubstitusikan ke Persamaan 127 sehingga menghasilkan Persamaan 128, 129, dan 130.

$$dA = 2ydx \dots\dots\dots (125)$$

$$I_y = 2 \int_{-a}^a x^2 y dx \dots\dots\dots (126)$$

$$I_y = 2 \frac{b}{a} \int_{-a}^a x^2 \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{f(x)}} dx \dots\dots\dots (127)$$

$$I_y = 2 \frac{b}{a} \int_{-a}^a x^2 \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{1 + mx}} dx \dots\dots\dots (128)$$

$$I_y = 2 \frac{b}{a} \int_{-a}^a x^2 \sqrt{(a^2 - x^2)(1 - mx)} dx \dots\dots\dots (129)$$

$$I_y = 2 \frac{b}{a} \int_{-a}^a x^2 \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{e^{mx}}} dx \dots\dots\dots (130)$$

Momen inersia penampang lintang buluh bambu terhadap sumbu y (I_y) yang didekati dengan bentuk bulat telur diselesaikan dengan Persamaan 128, 129, dan 130 lalu hasilnya didaftar pada Tabel 11.

Centroid ($\bar{x}$) tidak berimpit dengan sumbu y , sehingga teorema sumbu sejajar (Persamaan 131) dipergunakan untuk menghitung momen inersia terhadap sumbu y yang melalui *centroid* (I_{yc}), lalu hasilnya ditabelkan di Tabel 12.

$$I_y = I_{yc} + x^2 A \dots\dots\dots (131)$$

Tabel 11. Momen inersia penampang bambu terhadap sumbu y (I_y) yang didekati berbentuk bulat telur

Table 11. Bamboo culm's cross-section moment of inertia about y -axis (I_y) idealized as egg-shape

Deskripsi (Description)	<i>G. apus</i>	<i>B. vulgaris</i>	<i>G. pseudoarundinacea</i>	<i>G. robusta</i>
Sumbu semi mayor tepi luar (Outer semi major axis) (a_1 , cm)	4,315	3.59	4.39	4.24
Sumbu semi minor tepi luar (Outer semi minor axis) (b_1 , cm)	4,265	3.27	4.27	4.00
Tebal dinding (Culm-wall thickness) (t , cm)	1,00	0.90	1.25	1.10
Sumbu semi mayor rongga (Cavity semi major axis) (a_2 , cm)	3,32	2.69	3.14	3.14
Sumbu semi minor rongga (Cavity semi minor axis) (b_2 , cm)	3,27	2.37	3.02	2.90
Momen inersia tepi luar dihitung dengan: (Moment of inertia for outer area calculated by:)				
Persamaan (Equation) 128	272,61	119.20	287.55	242.46
Persamaan (Equation) 129	267,99	117.81	282.49	238.49
Persamaan (Equation) 130	270,25	118.49	284.97	240.44
Momen inersia rongga dihitung dengan: (Moment of inertia for cavity area calculated by:)				
Persamaan (Equation) 128	94,12	36.13	73.93	70.99
Persamaan (Equation) 129	93,18	35.90	73.27	70.36
Persamaan (Equation) 130	93,65	36.01	73.56	70.67
Momen inersia dinding batang bambu dihitung dengan: (Moment of inertia for culm-wall area calculated by:)				
Persamaan (Equation) 128	178,49	83.07	213.62	171.47
Persamaan (Equation) 129	174,81	81.91	209.22	168.13
Persamaan (Equation) 130	176,60	82.48	211.37	169.77
Catatan (Note): $m=0.06$				

Tabel 12. Momen inersia penampang bambu terhadap y yang melalui *centroid* (I_{yc}) yang didekati dengan bentuk cincin bulat telur

Table 12. Bamboo culm's cross-section moment of inertia about y which through centroid (I_{yc}) idealized as egg-shape

Deskripsi (Description)	<i>G. apus</i>	<i>B. vulgaris</i>	<i>G. pseudoarundinacea</i>	<i>G. robusta</i>
Momen inersia terhadap sumbu y (Moment of inertia about y -axis) (I_y):				
linier	178,49	83,07	213,62	171,47
power	174,81	81,91	209,22	168,13
eksponensial	176,60	82,48	211,37	169,77
Jarak <i>centroid</i> cincin bulat telur dari sumbu y (Centroid distance of egg-shape ring to y -axis) ($\bar{x}$)				
linier	-1,59	-1,04	-1,55	-1,47
power	-1,16	-1,53	-2,33	-2,21
eksponensial	-0,87	-0,58	-0,85	-0,81
Luas cincin bulat telur (Egg-shape ring are) (A)				
linier	24,06	16,94	29,39	24,91
power	40,71	8,69	14,50	12,30
eksponensial	23,89	16,86	29,19	24,75
Momen inersia cincin bulat telur terhadap sumbu y yang melalui <i>centroid</i> (Moment of inertia of egg-shape ring about y through centroid) (I_{yc})				
linier	117,67	64,75	143,00	117,65
power	120,02	61,56	130,49	108,06
eksponensial	158,52	76,81	190,28	153,53

Konstruksi bambu telah sering dibangun secara tradisional mengikuti pengalaman yang diwariskan secara turun-temurun. Analisis struktur mengikuti tata cara desain yang ditetapkan standar atau spesifikasi desain bangunan (*building code*) perlu dilakukan agar bangunan aman menahan beban dan mampu memenuhi fungsi layannya selama jangka waktu yang direncanakan. Analisis struktur berperan penting memperhitungkan bagaimana suatu kondisi pembebanan (meliputi besar, arah, distribusi, dan kombinasinya) berdampak terhadap struktur bangunan. Respon struktur bangunan terhadap beban yang diterimanya dipengaruhi oleh kondisi tumpuan (pondasi), sifat material, bentuk geometri bangunan dan komponen penyusunnya). Studi ini membuka kemungkinan untuk melakukan analisis struktur konstruksi bangunan bambu mengikuti kaidah-kaidah konstruksi modern dengan memformulasi sifat-sifat penampang bambu mengikuti geometri standar *conic* yaitu lingkaran, elips, atau bulat telur. Sifat-sifat penampang meliputi luas area, momen pertama, *centroid*, dan momen inersia didiskusikan secara detil melengkapi nilai kekuatan dan kekakuan material sehingga desainer dapat menggunakannya untuk analisis struktur. Analisis struktur dapat dilakukan dalam tahapan perencanaan untuk membangun bangunan yang aman, atau dilakukan pada masa pasca konstruksi untuk mengukur keamanan struktur yang telah berdiri.

IV. KESIMPULAN

Desainer perlu menyederhanakan variasi bentuk penampang bambu mengikuti geometri ideal yang paling mendekati bentuk aktualnya agar analisis struktur konstruksi bambu dapat dilakukan. Penampang bambu dapat didekati serupa dengan salah satu bentuk geometri *conic* standar yaitu cincin lingkaran, cincin elips, atau cincin bulat telur. Rumus-rumus sifat penampang yang meliputi luas, momen pertama, *centroid*, dan momen inersia ketiga bentuk geometri *conic* standar tersebut berhasil diformulasikan dalam studi ini. Selanjutnya desainer dapat memilih bentuk geometri standar yang paling mendekati bentuk aktual penampang bambu yang diperoleh dan akan dipergunakan sebagai komponen bangunan. Rumus-rumus yang telah diformulasikan dalam studi ini perlu dipilih sesuai kondisi batang bambu yang dipakai sehingga keandalan konstruksi bambu memenuhi fungsi layannya menjadi lebih terukur.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis menyampaikan terima kasih kepada Institut Pertanian Bogor, Universitas Pakuan, dan Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan atas ijin

dan dukungannya sehingga studi ini dapat diselesaikan.

KONTRIBUSI PENULIS

Penulis: Effendi Tri Bahtiar (ETB), Asep Denih (AD), Lina Karlinasari (LK), Gustian Rama Putra (GRP), Naresworo Nugroho (NN), Sulistyono (SS) Ide, ETB; desain dan rancangan percobaan, ETB; percobaan dan perlakuan pengujian, ETB; pengumpulan data dan analisis data, ETB; penulisan manuskrip, ETB; serta perbaikan dan finalisasi manuskrip, ETB, LK, NN, AD, GRP, dan SS; Supervisi, LK dan NN; Sumberdaya, ETB, AD, GRP, dan SS; akuisisi pendanaan dan administrasi proyek, ETB, AD, GRP, dan SS. Semua penulis telah membaca dan menyetujui artikel yang telah terbit.

DAFTAR PUSTAKA

- [ASTM] American Society for Testing and Materials. (2017). ASTM D2915 Standard Practice for Sampling and Data-Analysis for Structural Wood and Wood-Based Products. In *American Society for Testing and Materials*. doi: 10.1520/D2915-17.2
- Andre, J.-P. (1998). A study of the vascular organization of bamboos (Poaceae-Bambuseae) using a Microcasting method. *LAWA Journal*, 19(3), 265–278.
- Bahtiar, E. T. (2015). *Keandalan Bambu untuk Material Konstruksi Hijau*. IPB University.
- Bahtiar, E. T., Erizal, E., Hermawan, D., Nugroho, N., & Hidayatullah, R. (2022). Experimental Study of Beam Stability Factor of Sawn Lumber Subjected to Concentrated Bending Loads at Several Points. *Forests*, 13(9), 1480. doi: 10.3390/f13091480
- Bahtiar, E. T., Imanullah, A. P., Hermawan, D., Nugroho, N., & Abdurachman. (2019). Structural grading of three sympodial bamboo culms (Hitam, Andong, and Tali) subjected to axial compressive load. *Engineering Structures*, 181, 233–245. doi:10.1016/j.engstruct.2018.12.026
- Bahtiar, E. T., Malkowska, D., Trujillo, D., & Nugroho, N. (2021). Experimental study on buckling resistance of *Guadua angustifolia* bamboo column. *Engineering Structures*, 228, 111548. doi: 10.1016/j.engstruct.2020.111548
- Bahtiar, E. T., Nugroho, N., Surjokusumo, S., & Karlinasari, L. (2013). Eccentricity Effect on Bamboo's Flexural Properties. *Journal of Biological Sciences*, 13(2), 82–87. doi: 10.3923/jbs.2013.82.87
- Bahtiar, E. T., Trujillo, D., & Nugroho, N. (2020). Compression resistance of short members as

- the basis for structural grading of *Guadua angustifolia*. *Construction and Building Materials*, 249, 118759. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2020.118759
- Chuma, S., Hirohashi, M., Ohgama, T., & Kasahara, Y. (1990). Composite structure and tensile properties of Mousou bamboo. *Journal of the Society of Materials Science, Japan*, 39(442), 847–851. doi: 10.2472/jsms.39.847
- Firmanti, A., Bahtiar, E. T., Surjokusumo, S., Komatsu, K., & Kawai, S. (2005). Mechanical stress grading of tropical timbers without regard to species. *Journal of Wood Science*, 51(4). doi: 10.1007/s10086-004-0661-z
- Gere, J. M., & Timoshenko, S. P. (1991). *Mechanics of Materials* (4th ed.). Springer US. doi: 10.1007/978-1-4899-3124-5
- Hayatunnufus, A., Nugroho, N., & Bahtiar, E. T. (2022). Faktor Stabilitas Balok Kayu pada Konfigurasi Pembebanan Terpusat. *Jurnal Teknik Sipil Dan Lingkungan*, 7(2), 129–146. doi: 10.29244/jsil.7.2.129-146
- Inoue, A., Sakamoto, S., Suga, H., & Kitahara, F. (2011). Estimation of culm volume for bamboo, *Phyllostachys bambusoides*, by two-way volume equation. *Biomass and Bioenergy*, 35(7), 2666–2673. doi: 10.1016/j.biombioe.2011.03.003
- ISO 19624:2018: Bamboo structures — Grading of bamboo culms — Basic principles and procedures, 22 (2018). <https://www.iso.org/standard/65528.html>
- Janssen, J. (1991). *Mechanical Properties of Bamboo*. Kluwer Academic Publishers.
- Javadian, A., Smith, I. F. C., Saeidi, N., & Hebel, D. E. (2019). Mechanical properties of bamboo through measurement of culm physical properties for composite fabrication of structural concrete reinforcement. *Frontiers in Materials*, 6(February), 1–18. doi: 10.3389/fmats.2019.00015
- Liese, W. (1985). Anatomy and Properties of Bamboo. *Proceedings of the International Bamboo Workshop*, 196–208.
- Liese, W. (2002). *The Anatomy of Bamboo Culms*. <https://brill.com/view/title/7815>
- Liese, W., & Tang, T. K. H. (2015). Properties of the Bamboo Culm. In *Bamboo, Tropical Forestry 10* (pp. 227–256). doi: 10.1007/978-3-319-14133-6_8
- Liu, P., Zhou, Q., Fu, F., & Li, W. (2022). Bending Strength Design Method of *Phyllostachys edulis* Bamboo Based on Classification. *Polymers*, 14(7), 1418. doi: 10.3390/polym14071418
- Mohmod, A. L., Amin, A. H., Kasim, J., & Jusuh, M. Z. (1992). Effects of anatomical characteristics on the physical and mechanical properties of *Bambusa blumeana*. *Journal of Tropical Forest Science*, 6(2), 159–170.
- Mohmod, A. L., Ariffin, W. T. W., & Ahmad, F. (1990). Anatomical features and mechanical properties of three Malaysian Bamboos. *Journal of Tropical Forest Science*, 2(3), 227–234.
- Nugroho, N., & Bahtiar, E. T. (2021). Buckling formulas for designing a column with *Gigantochloa apus*. *Case Studies in Construction Materials*, 14, e00516. doi: 10.1016/j.cscm.2021.e00516
- Nugroho, N., Bahtiar, E. T., & Nurmadi. (2018). Grading Development of Indonesian Bamboo Culm: Case Study on Tali Bamboo (*Gigantochloa apus*). *2018 World Conference on Timber Engineering*, 1–6.
- Nugroho, N., Kartini, & Bahtiar, E. T. (2021). Cross-species bamboo grading based on flexural properties. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 891(1), 012008. doi: 10.1088/1755-1315/891/1/012008
- Nurmadi, Nugroho, N., & Bahtiar, E. T. (2017). Structural grading of *Gigantochloa apus* bamboo based on its flexural properties. *Construction and Building Materials*, 157, 1173–1189. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2017.09.170
- Sá, R. A., Sá, M. G., & Miranda, I. P. A. (2017). Bending strength and nondestructive evaluation of structural bamboo. *Construction and Building Materials*, 146, 38–42. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2017.04.074
- Sánchez Vivas, L., Costello, K., Mobley, S., Mihelcic, J. R., & Mullins, G. (2022). Determination of safety factors for structural bamboo design applications. *Architectural Engineering and Design Management*, 18(1), 26–37. doi: 10.1080/17452007.2020.1781589
- Schulgasser, K., & Witztum, A. (1992). On the strength, stiffness and stability of tubular plant stems and leaves. *Journal of Theoretical Biology*, 155(4), 497–515. doi: 10.1016/S0022-5193(05)80632-0
- Sharma, B., Harries, K. A., & Ghavami, K. (2013). Methods of determining transverse mechanical properties of full-culm bamboo. *Construction and Building Materials*, 38, 627–637. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2012.07.116
- Shukla, S. R., & Sharma, S. K. (2017). Evaluation of Dynamic Elastic Properties of *Bambusa Bambos* at Three Different Stages of Its Life Cycle by Elastasonic Technique. *Journal of*

- Tropical Forest Science*, 29(4), 448–456.
<http://www.jstor.org/stable/44371424>
- Trujillo, D., & Jangra, S. (2016). *Grading of Bamboo* (No. 79; 1st ed., INBAR Working Paper). International Network for Bamboo and Rattan.
- Wegst, U. G. K. (2011). Bending efficiency through property gradients in bamboo, palm, and wood-based composites. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 4(5), 744–755. doi: 10.1016/j.jmbbm.2011.02.013